РЕШУ ЕГЭ
Образовательный портал для подготовки к экзаменам

Гилемханов Р. Г., Москва

ЗАДАЧИ О БАНКОВСКИХ ВКЛАДАХ
на основной волне ЕГЭ–2018 по математике

Задачи по финансовой математике, предложенные на ЕГЭ 1 июня 2018 г. под номером 17, судя по сообщениям в социальных сетях, вызвали некоторое удивление как некоторых выпускников, так и части учителей.

С чем же связано это удивление? Его вызвали небольшие изменения в постановке тех задач, которые в течение последних лет регулярно предлагались в тренировочных работах СтатГрада или рассматривались в печатных пособиях для старшеклассников, готовящихся к ЕГЭ по математике.

Поскольку составители ЕГЭ преподнесли выпускникам некий неожиданный «подарок», на что они имели полное право, разберемся, в чем заключается неожиданная новизна задач на примере одной из них, предложенной на ЕГЭ 1 июня 2018 г.

Примем следующие соглашения:

а) расчеты будем вести в тысячах рублей, кратко обозначая их «тыс. руб.»;

б) сумму ежемесячных платежей по погашению основного долга назовем видом A; а другую часть ежемесячных платежей на погашение начисленной процентной надбавки — видом B;

в) будем пользоваться терминами:

– кредитный период — период, в течение которого осуществляется возврат кредита;
– заемщик — юридическое или физическое лицо, которое планирует взять кредит;
– кредитор — субъект, который предоставляет заемщику кредит.

Задача 1. 15-го апреля планируется взять в банке кредит на 1200 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на p% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого с 1-го по n-й месяц долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа n-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
– к 15-му числу $(n+1)$ месяца долг должен быть погашен полностью.

Найдите p, если всего банку было выплачено 1288 тысяч рублей.

Решение. Планируя взять кредит, заемщик составит смету расходов на период кредитования, образующих виды A и B.

1. По условию задачи ясно: на вид A следует направить денежные средства в сумме 1200 тыс. руб. Следовательно, за указанный период, измеряемый $(n + 1)$ месяцем, заемщик переплатит банку $1288-1200=88$ тыс. руб. Таким образом, на вид B заемщик должен направить сумму, равную 88 тыс. руб.

2. Поскольку с 1-го по n-й месяц кредитования из вида A сметы заемщика ежемесячно будет выплачиваться банку ровно 80 тыс. руб. (об этом сказано в условии задачи: «15-го числа каждого с 1-го по n-й месяц долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца»), значение n равно $(1200-400):80=10$.

Кроме того, заметим, что 10 упорядоченных строк вида A сметы расходов образуют конечную убывающую арифметическую прогрессию с первым членом 1200 и разностью, равной –80.

Теперь займемся вопросами формированием объема денежных средств вида B.

3. Заметим, что в первый месяц кредитования заемщик обязан перечислить банку p% суммы, равной 1200 тыс. руб., т. е. $12p$ тыс. руб. В каждый следующий месяц, за исключением последнего $(n+1)$-го месяца, заемщик перечисляет кредитору на $80\cdot 0{,}01p=0{,}8p$ тыс. руб.

меньше, нежели в предыдущий месяц. Следовательно, соответствующие 10 упорядоченных строк вида *B* также образуют некоторую конечную убывающую арифметическую прогрессию. В 10-й месяц кредитования в соответствующей строке вида *B* сметы расходов заемщика будет обозначена сумма, равная $12p - 0{,}8p \cdot (10-1) = 4{,}8p$ тыс. руб.

4. Общая сумма таких расходов по строкам 1–10 этого вида равна

$$\frac{12p + 4{,}8p}{2} \cdot 10 = 60p + 24p = 84p \text{ тыс. руб.}$$

5. Кроме этой суммы, в последнем (n + 1)-м, т. е. в 11-м месяце кредитования, в виде *B* сметы расходов 11-й строкой необходимо указать сумму, равную $400 \cdot 0{,}01p = 4p$ тыс. руб. Таким образом, всего за 11 месяцев вся сумма составит $84p + 4p = 88p$ тыс. руб.

6. Но тогда выполняется равенство $88p = 88$, откуда $p = 1$. Задача решена.

При решении задачи были использованы две формулы:

– формула для n-го члена арифметической прогрессии;

– формула для суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Возникает вопрос: к какому типу можно отнести рассмотренный способ погашения кредита из числа известных двух способов: к дифференцированному или к аннуитетному? Ответ: ни к тому, ни к другому. Хотя в течение первых 10 месяцев кредитования все выплаты ведутся по правилам дифференцированного способа погашения кредита, в последний месяц кредитования правила меняются вот таким «чудовищным» образом. Как быть с тем, что описанная в задаче ситуация, на первый взгляд, не вписывается в реальные кредитные условия, предоставляемые российскими банками?

Оказывается, если хорошо поразмыслить, такой поворот событий в действительности все же возможен. Вполне возможен. И вот почему.

Во-первых, отметим, что будущий заемщик пока что только мечтает, планирует и прикидывает свои возможности. Договор еще не составлен, не подписан заемщиком и кредитором. Они могут закрепить в договоре любые условия, о которых договорятся.

Во-вторых, когда дело дойдет до составления договора между субъектами сделки, договор может закрепить и такие правила:

– кредит будет оформлен не на 11 месяцев, а на 15 месяцев;

– 15-го числа каждого с 1-го по 14-й месяц долг должен быть на 80 тыс. руб. меньше, чем долг на 15-е число предыдущего месяца при неизменных других параметрах, указанных в условии рассматриваемой задачи.

Но тогда и общая сумма денежных средств, возвращенных банку, будет не 1288 тыс. руб., а 1296 тыс. руб., т. е. разница составит 8 тыс. руб.

Таким образом, ситуация в зависимости от желания заемщика может сложиться двумя вариантами.

1. Заемщик 15-го апреля берет в банке кредит на 1200 тысяч рублей на 15 месяцев на таких условиях:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого с 1-го по 14-й месяц долг должен быть на 80 тыс. руб. меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15-му числу 15-го месяца долг должен быть погашен полностью.

2. До 2-го марта следующего года заемщик погашает долг по схеме, описанной выше, и в тот же день, т. е. 2-го марта, заемщик принимает решение погасить кредит досрочно. То есть в этот день он вносит платеж в сумме 404 тыс. руб.

Тогда все платежи заемщика по этому кредиту пройдут по «сценарию», описанному в условии рассмотренной задачи.

Уместно задать и такой вопрос: можно ли было на ЕГЭ рассмотреть задачу о $(n+5)$ месяцах вместо задачи о $(n+1)$ месяце? Автор этих строк считает, что можно, поскольку задачу, например, о трапеции можно заменить задачей о треугольнике, удачно достроив эту самую трапецию до некоторого треугольника, если рассмотрение задачи о треугольнике одновременно разрешит и задачу о трапеции, «не ломая» при этом самой заданной трапеции.

В этом случае заданный объем денежных средств в сумме 1200 тыс. руб. пришлось бы заменить суммой 1296 тыс. руб.

В целях закрепления рассмотренных идей покажем решение еще трех задач на эту тему.

Задача 2. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц.

Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– на 15-е число каждого с 1-го по 20-й месяц долг должен уменьшаться на 40 тысяч рублей;

– за 21-й месяц долг должен быть погашен полностью.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 20-го месяца, если банку всего было выплачено 1852 тыс. рублей?

Решение. Пусть сумма планируемого кредита равна S тыс. руб. Тогда долг заемщика с 1-го по 21-й месяц уменьшается как конечная арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, у которой $n = 21$, первый член $a_1 = S$, разность $d = -40$. Тогда, очевидно, $a_{21} = a_1 + 20d = S - 20d = S - 800$.

Поскольку долг клиента будет уменьшаться с 1-го по 20-й месяцы равномерно, ежемесячные процентные ставки также будут уменьшаться равномерно, образуя конечную арифметическую прогрессию с первым членом, равным $0,01S$, и последним, 21-м членом, равным $0,01(S-800)$. Найдем сумму членов этой прогрессии:

$$\frac{0,01S + 0,01(S-800)}{2} \cdot 21 = \frac{0,01S + 0,01S - 8}{2} \cdot 21 = (0,01S - 4) \cdot 21 = 0,21S - 84.$$

Таким образом, общая сумма, возвращаемая кредитору заемщиком, составит

$$S + 0,21S - 84 = 1,21S - 84 \text{ тыс. руб.}$$

Но тогда $1,21S - 84 = 1852 \Leftrightarrow S = 1600$.

Долг клиента на 15-е число 20-го месяца, равный долгу на 1-е число 21-го месяца, составит $1600 - 800 = 800$ тыс. руб.

Ответ: 800.

Задача 3. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1 по n-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;

– к 15-му числу 21 -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение. Из условия задачи ясно: в течение первых 20 месяцев на погашение так называемых основных долгов ежемесячно будет отведено $(300-100):20 = 10$ тыс. руб.

В первый месяц кредитования на покрытие процентного начисления будет переведена сумма, равная $300 \cdot 0,02 = 6$ тыс. руб. Поскольку в первые 20 месяцев кредитования основной долг клиента будет уменьшаться равномерно, произойдет ежемесячное равномерное уменьшение процентных начислений. Это уменьшение будет составлять $10 \cdot 0,02 = 0,2$ тыс. руб. ежемесячно.

В 20-й месяц кредитования на выплату процентной надбавки потребуется сумма, равная $6-19\cdot 0,2=6-3,8=2,2$ тыс. руб. За период с 1– го по 20 –й месяц кредитования на покрытие процентных надбавок в целом потребуется $\frac{6+2,2}{2}\cdot 20=82$ тыс. руб. В 21-й месяц кредитования, на выплату процентной надбавки будет выделена сумма $100\cdot 0,02=2$ тыс. руб.

Поэтому сумма платежей за весь период кредитования составит $300+82+2=384$ тыс. руб.

Ответ: 384 тыс. руб.

Задача 4. 15-го января планируется взять в банке кредит на 700 тысяч рублей на (n + 1) месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– 15-го числа каждого с 1-го по n-й месяц долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– за (n + 1)-й месяц долг должен быть погашен полностью.

Найдите n, если банку всего было выплачено 755 тысяч рублей, а долг на 15-е число n-го месяца составлял 300 тысяч рублей.

Решение. Переплата заемщика банку составит $755-700=55$ тыс. руб., из которых $300\cdot 0,01=3$ тыс. руб. приходится на последний (n + 1)-й месяц кредитования. Следовательно, за n месяцев в целом заемщик будет выплачивать процентную надбавку кредитора на сумму $55-3=52$ тыс. руб.

15-го числа каждого месяца, начиная с 1-го и по n-й месяц, долг заемщика будет уменьшаться на $\frac{700-300}{n}=\frac{400}{n}$ тыс. руб.

Процентная надбавка за первый месяц кредитования составит $700\cdot 0,01=7$ тыс. руб. Эта сумма из месяца в месяц будет уменьшаться на одну и ту же величину $\frac{400}{n}\cdot 0,01=\frac{4}{n}$ тыс. руб., образуя конечную убывающую арифметическую прогрессию с первым членом, равным 7, и разностью, равной $-\frac{4}{n}$. Сумма первых n членов этой прогрессии равна

$$\frac{7+\left(7-\frac{4}{n}\cdot(n-1)\right)}{2}\cdot n=\frac{14-4+\frac{4}{n}}{2}\cdot n=\frac{10n+4}{2}\text{ тыс. руб.}$$

Это и есть часть переплаты заемщика кредитору.

Как было показано выше, полученная величина равна 52 тыс. руб. Итак, $10n+4=52\cdot 2$, откуда $10n=52\cdot 2-4$, $n=10$.

Ответ: 10.