Гилемханов Р. Г. (Москва)

СВОЙСТВО ПРОПОРЦИИ… ИЛИ СВОЙСТВО ДРОБИ?

Об использовании основного свойства пропорции и распределительного закона умножения относительно сложения при решении рациональных уравнений

В данной статье мы попытаемся показать, насколько удачно можно использовать основное свойство пропорции и распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения при решении уравнений и сводимых к уравнениям текстовых задач.

Прежде приведём решение рационального уравнения $\frac{3x}{x-1}-5=\frac{4}{x+2}$ из школьного учебника Алгебра 8 А. Г. Мордковича и др. (с. 279–280):

$$\frac{3x}{x-1}-5=\frac{4}{x+2};$$

$$\frac{3x}{x-1}-5-\frac{4}{x+2}=0;$$

$$\frac{3x(x+2)-5(x-1)(x+2)-4(x-1)}{(x-1)(x+2)}=0;$$

$$\frac{3x^2+6x-5(x^2+x-2)-4x+4}{(x-1)(x+2)}=0;$$

$$\frac{3x^2+6x-5x^2-5x+10-4x+4}{(x-1)(x+2)}=0;$$

$$\frac{-2x^2-3x+14}{(x-1)(x+2)}=0.$$

Вспомним условия равенства алгебраической дроби нулю: алгебраическая дробь равна нулю тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

1) числитель дроби равен нулю;
2) знаменатель дроби отличен от нуля.

Приравняв нулю числитель дроби в левой части последнего уравнения, получим: $-2x^2-3x+14=0$ и далее $2x^2+3x-14=0$. Корни полученного квадратного уравнения таковы: 2 и $-3,5$ (проверьте!). Осталось проверить выполнение указанного выше условия равенства дроби нулю: будет ли знаменатель $(x-1)(x+2)$ при найденных значениях переменной отличен от нуля. Видим, что и при $x=2,$ и при $x=-3,5$ выражение $(x-1)(x+2)$ отлично от нуля.

Вывод: оба найденных значения переменной x являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 2; $-3,5$.

Обратим внимание на такой вопрос: чего в школьной математике должно быть больше — готовых алгоритмов решений задач или творческого подхода? Вопрос, на наш взгляд, очень даже не простой. Ведь цель науки математики состоит не в реализации готовых алгоритмов, а в их придумывании, разработке. Основа математики — творческий подход при решении каждой задачи.

Попробуем отойти от текста учебника при решении уравнения, которое мы привели выше, и вместо условия равенства алгебраической дроби нулю отдадим предпочтение основному свойству пропорции.

Посмотрим, что получится:

$$\frac{3x}{x-1}-5=\frac{4}{x+2}\Leftrightarrow\frac{3x-5(x-1)}{x-1}=\frac{4}{x+2}\Leftrightarrow\frac{5-2x}{x-1}=\frac{4}{x+2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(5-2x)(x+2)=4(x-1)\Leftrightarrow 5x+10-2x^2-4x=4x-4\Leftrightarrow 2x^2+3x-14=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{-3\pm11}{4},$$

а значит, $x=2$ или $x=-3,5$. При использовании основного свойства пропорции мы перешли к уравнению-следствию, а потому необходимо проверить, что полученные корни знаменатели исходного уравнения в нуль не обращают. Очевидно, что это так.

Заметим, что при таком способе решения, нам удалось избавится от излишнего раскрытия скобок и оптимизировать выкладки. Приведём решения ещё нескольких уравнений и текстовых задач с использованием предлагаемого подхода.

Задача 1 [2, с. 165–168] [1]. Перегон в 60 км поезд должен был проехать с постоянной скоростью за определенное расписанием время. Простояв у семафора перед перегоном 5 мин, машинист вынужден был увеличить скорость на 10 км/ч, чтобы наверстать к окончанию прохождения перегона потерянные 5 мин. С какой скоростью поезд должен был пройти перегон по расписанию?

Решение. Пусть скорость поезда по расписанию x км/ч, тогда расстояние в 60 км поезд должен был преодолеть за $\frac{60}{x}$ ч. Однако он ехал со скоростью $(x+10)$ км/ч и в пути был в целом $\frac{60}{x+10}$ ч. Время, равное разности $\left(\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}\right)$ ч, и есть 5 мин, т. е. $\frac{1}{12}$ ч. Если мы решим уравнение $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{12}$, то найдём искомую скорость:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow 60\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{1}{12}\Leftrightarrow 60\cdot\frac{x+10-x}{x(x+10)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{600}{x(x+10)}=\frac{1}{12}.$$

Полученное уравнение легко решить с использованием основного свойства пропорции: пропорция верна тогда и только тогда, когда произведение крайних её членов равно произведению средних членов. В нашем случае $x^2+10x-7200=0$. Положительный корень этого уравнения единственный, и мы легко обнаружим его, используя теорему, обратную теореме Виета. Получаем: $x=80$.

Ответ: 80 км/ч.

Задача 2 [2, с. 168–170]. Решите уравнение $\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}=\frac{25}{3}$.

Решение. Вынесем 80 за скобки, разделим обе части уравнения на 5, найдём разность дробей, используем свойство пропорции:

$$\frac{80}{20+x}+\frac{80}{20-x}=\frac{25}{3}\Leftrightarrow 80\cdot\left(\frac{1}{x+20}-\frac{1}{x-20}\right)=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\frac{16\cdot(-40)}{x^2-400}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{16\cdot(-8)}{x^2-400}=\frac{1}{3}\Rightarrow x^2-400=-384\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm4.$$

При $x=4$ или $x=-4$ знаменатели дробей в нуль не обращаются.

Ответ: $\{-4;4\}$.

[1] Список литературы приведён в конце статьи.

Задача 3. Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 12 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час – третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа после этого догнал первого.

Решение. Пусть скорость третьего велосипедиста x км/ч. Заметим следующее.

1. К моменту выезда третьего велосипедиста из посёлка первый велосипедист проедет 24 км (12 км/ч $\cdot$ 2ч = 24 км).

2. Скорость сближения третьего велосипедиста со вторым составляет $(x-10)$ км/ч. Значит, третий велосипедист догнал второго велосипедиста через $\dfrac{10}{x-10}$ ч.

3. Скорость сближения третьего велосипедиста с первым равна $(x-12)$ км/ч. Это значит, что третий велосипедист догнал первого велосипедиста через $\dfrac{24}{x-12}$ ч.

4. Поскольку третий велосипедист догнал первого велосипедиста через 2 часа после того, как он догнал второго велосипедиста, можно составить уравнение $\dfrac{24}{x-12}-\dfrac{10}{x-10}=2.$ Решим это уравнение:

$$\frac{24}{x-12}-\frac{10}{x-10}=2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{12}{x-12}-\frac{5}{x-10}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{12x-120-5x+60}{x^2-22x+120}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-22x+120=7x-60 \Leftrightarrow x^2-29x+180=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{29\pm\sqrt{841-720}}{2}=\frac{29\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{29\pm 11}{2}.$$

Следовательно, $x=9$ или $x=20$. Так как по смыслу задачи $x>12$, то $x=20$. Полученное значение удовлетворяет уравнению.

О т в е т: 20 км/ч.

Задача 4. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость течения. Тогда скорость теплохода по течению равна $(15+x)$ км/ч, а скорость против течения равна ($15-x$) км/ч. На преодоление расстояния до пункта назначения и обратно теплоход затратил 40 – 10 = 30 (ч). Следовательно,

$$\frac{200}{15+x}+\frac{200}{15-x}=30 \Leftrightarrow 200\cdot\left(\frac{1}{15+x}+\frac{1}{15-x}\right)=30 \Leftrightarrow 20\cdot\frac{15-x+15+x}{225-x^2}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20\cdot\frac{30}{225-x^2}=3 \Leftrightarrow \frac{200}{225-x^2}=1 \Leftrightarrow 225-x^2=200 \Leftrightarrow x^2=25.$$

Положительный корень этого уравнения равен 5.

О т в е т: 5 км/ч.

Задача 5 [3, с. 11]. Два экскаватора вырыли котлован за 48 дней. Первый экскаватор, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу в 3 раза быстрее, чем второй. За сколько дней первый экскаватор, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу?

Решение. Пусть первый экскаватор, работая отдельно, мог выполнить работу за x дней. Тогда он каждый день выполняет $\dfrac{1}{x}$ часть работы. Второй экскаватор, работая отдельно, в соответствии с условием задачи мог бы вырыть котлован за $3x$ дней, каждый день роя $\frac{1}{3x}$ часть котлована. При совместной работе два экскаватора в течение 48 дней выполнят всю работу. Это значит, что они выполняют $\frac{1}{48}$ часть работы в день:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}=\frac{1}{48} \Leftrightarrow \frac{4}{3x}=\frac{1}{48} \Leftrightarrow 4\cdot 48=3x \Leftrightarrow x=64.$$

О т в е т: за 64 дня.

Задача 6 [3, с. 110]. Две машинистки должны были напечатать по 120 страниц. Первая машинистка выполнила работу на 1 день раньше второй, так как печатала на 10 страниц в день больше. Сколько страниц в день печатала каждая машинистка?

Решение. Пусть вторая машинистка печатала в день x страниц. Тогда первая машинистка печатала в день $(x+10)$ страниц. Для выполнения работы второй машинистке потребовалось $\frac{120}{x}$ дней, а первой машинистке $\frac{120}{x+10}$ дней. По условию задачи вторая машинистка работала на один день больше:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=1 \Leftrightarrow 120\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)=1 \Leftrightarrow 120\cdot\frac{x+10-x}{x^2+10x}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1200}{x^2+10x}=1 \Leftrightarrow x^2+10x-1200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30, \\ x=-40. \end{array}\right.$$

Корень, равный -40, не подходит по смыслу задачи. Итак, вторая машинистка печатала в день 30 страниц, первая машинистка 40 страниц.

О т в е т: первая машинистка печатала 40 страниц, вторая печатала 30 страниц.

Задача 7 (ДВИ Пробник МГУ 01.07.2019]. Из пункта *A* в пункт *B* вышел пешеход. Вслед за ним через два часа из *A* выехал велосипедист, а ещё через полчаса – мотоциклист. Все трое двигались с постоянными скоростями. Мотоциклист обогнал в пути пешехода и велосипедиста и через некоторое время сделал остановку в пункте *C*. Пешеход и велосипедист одновременно достигли пункта *C* на 3 минуты позже мотоциклиста и сразу после этого все трое продолжили движение. На сколько времени (в часах) раньше пешехода в пункт *B* прибыл велосипедист, если пешеход прибыл туда на 1 час позже мотоциклиста?

Решение. Пусть расстояние от *A* до *C* равно S_1, время, необходимое пешеходу для преодоления этого расстояния, равно t ч. Тогда велосипедисту необходимо $(t-2)$ ч, а мотоциклисту $t-2-0,5-0,05=t-2,55$ ч. Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста равны соответственно: $\frac{S_1}{t}$, $\frac{S_1}{t-2}$ и $\frac{S_1}{t-2,55}$ км/ч.

Зная скорости, найдём время, необходимое, чтобы преодолеть расстояния S_2 между пунктами *C* до *B*. Пешеходу, велосипедисту и мотоциклисту необходимо, соответственно,

$$S_2:\frac{S_1}{t}=\frac{S_2}{S_1}\cdot t, \qquad S_2:\frac{S_1}{t-2}=\frac{S_2}{S_1}\cdot(t-2) \quad \text{и} \quad S_2:\frac{S_1}{t-2,55}=\frac{S_2}{S_1}\cdot(t-2,55) \text{ часов.}$$

Причём по условию задачи

$$\frac{S_2}{S_1}\cdot t-\frac{S_2}{S_1}(t-2,55)=1 \Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1}\cdot(t-t+2,55)=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1}\cdot 2,55=1 \Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2,55} \Leftrightarrow \frac{S_2}{S_1}=\frac{20}{51}.$$

Осталось найти разность

$$\frac{S_2}{S_1}\cdot t-\frac{S_2}{S_1}(t-2)=\frac{S_2}{S_1}\cdot(t-t+2)=\frac{2S_1}{S_2}=2\cdot\frac{20}{51}=\frac{40}{51}.$$

О т в е т: $\frac{40}{51}$ ч.

Замечание. При решении этой задачи вынесение за скобки общего множителя $\frac{S_2}{S_1}$, то есть использование дистрибутивного закона умножения относительно сложения, облегчило ход вычислений.

Покажем теперь, как можно применить распределительный закон. Решим три уравнения из учебника алгебры для 8-го класса С. М. Никольского и др. из серии МГУ — школе. Это задания номером 345 а) — в). Рассмотрим их и в том порядке, в каком они даны в учебнике.

Задача 8 [3, с. 118]. Решите уравнение $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{4}$.

К этому уравнению авторы прилагают указание такого содержания: «… замените дроби $\frac{1}{x(x+1)}$ и $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ разностями дробей $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ и $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ соответственно». Нет спора, рекомендация замечательная, весьма удачная. Но есть ещё один путь, который заслуживает внимания. И вот какой.

Решение. В левой части общий множитель $\frac{1}{x+1}$ выносим за скобки. Далее:

$$\frac{1}{x+1}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{x(x+2)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{x(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

При $x\neq-1$ левую часть уравнения можно сократить на $x+1$, откуда

$$\frac{2}{x(x+2)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x(x+2)=8\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=-4.\end{array}\right.$$

О т в е т: $\{-4;2\}$.

Задача 9 [3, с. 118]. Решите уравнение $\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}=-2$.

Решение. Поступим аналогично:

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}=-2\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}\cdot\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}\right)=-2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x-1+x-3}{(x-3)(x-1)}=-2\Leftrightarrow\frac{1}{x-2}\cdot\frac{2(x-2)}{(x-3)(x-1)}=-2.\ \Leftrightarrow$$

Левую и правую части уравнения можно разделить на 2, кроме того, при $x\neq2$ левую часть уравнения можно сократить на $x-2$, а значит,

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)}=-1,$$

откуда

$$x^2-4x+3=-1\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Но при $x = 2$ знаменатели левой части уравнения обращаются в нуль. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Задача 10 [3, с. 118]. Решите уравнение

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = -1{,}5.$$

Решение. Вычислим сумму первых двух слагаемых левой части уравнения:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} \cdot \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} \right) =$$
$$= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x+3+x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+1)(x+3)}.$$

При $x \neq -2$ последнюю дробь можно сократить на $x+2$, получим $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$. Далее получаем:

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} \cdot \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+4} \right) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+3} \cdot \frac{2x+8+x+1}{(x+1)(x+4)} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} \cdot \frac{3x+9}{(x+1)(x+4)} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3(x+3)}{(x+3)(x+1)(x+4)} = -\frac{3}{2}.$$

При $x \neq -3$ левую часть полученного уравнения можно сократить на $x+3$, откуда, разделив обе части на 3, находим:

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = -2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = -3. \end{array} \right.$$

При найденных значениях x, левая часть исходного уравнения не имеет смысла. Значит, уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Литература:

1. Алгебра. 8 класс. Учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / А. Г. Мордкович и др. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.
2. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч.1. Учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. — М.: Мнемозина, 2013.
3. Алгебра. 8 класс. Учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / С. М. Никольский и др. – М.: Просвещение, 2014.