

548800) а) Обозначим $\frac{1}{\cos x} = t$, тогда уравнение примет вид $t^2 - 3t + 2 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = 2$, то есть $\cos x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. В первом случае $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, во втором случае $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) С помощью тригонометрической окружности отберем корни. На промежутке $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$ лежат $-2\pi, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$
 Ответ а) $x = 2\pi k, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $-2\pi, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$

548807) а) Обозначим $\frac{1}{\cos x} = t$, тогда уравнение примет вид $t^2 + 3t + 2 = 0$, откуда $t = -1$ или $t = -2$, то есть $\cos x = -1$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$. В первом случае $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, во втором случае $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) С помощью тригонометрической окружности отберем корни. На промежутке $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$ лежат $-3\pi, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}$
 Ответ а) $x = \pi + 2\pi k, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $-3\pi, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}$

548851 а) а) Обозначим $\frac{1}{\sin x} = t$, тогда уравнение примет вид $t^2 + 3t - 2 = 0$, откуда $t = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$. При $t = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \in (0; 1)$ имеем $\sin x = \frac{1}{t} > 1$, что невозможно. При $t = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$ имеем $\sin x = \frac{1}{t} = \frac{-2}{3 + \sqrt{17}}$, откуда $x = \arcsin \frac{-2}{3 + \sqrt{17}} + 2\pi k$ или $x = \pi - \arcsin \frac{-2}{3 + \sqrt{17}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 б) заметим, что $\alpha = \arcsin \frac{-2}{3 + \sqrt{17}} \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, поэтому на отрезке $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$ лежит $2\pi + \alpha$ из первого набора. С другой стороны $\pi - \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $3\pi - \alpha > 3\pi$, поэтому из второго набора не подходит ни одно число.
 Ответ а) $x = \arcsin \frac{-2}{3 + \sqrt{17}} + 2\pi k, x = \pi - \arcsin \frac{-2}{3 + \sqrt{17}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $x = 2\pi + \arcsin \frac{-2}{3 + \sqrt{17}}$

549113) а) Запишем уравнение в виде $x^2 - 2x = 3$, равносильном исходному. Его корнями будут $x = -1$ и $x = 3$.
 б) поскольку $-1 = \log_2 0,5$ и $3 = \log_2 8$, на указанном отрезке лежит только $x = -1$.
 Ответ а) $-1; 3$ б) -1

Клон а) решите уравнение $\log_5(x^2 - 4x) = 1$ б) укажите его корни на отрезке $[\log_3 0, 1; \log_3 10]$
 Запишем уравнение в виде $x^2 - 4x = 5$, равносильном исходному. Его корнями будут $x = -1$ и $x = 5$. б) поскольку $-1 = \log_3 \frac{1}{3}$ и $5 = \log_3 243$, на указанном отрезке лежит только $x = -1$.
 Ответ а) $-1; 5$ б) -1

548801) а) Пусть K – середина ребра AB , Q – такая точка на MK , что $MQ : QK = 2 : 1$. Тогда Q – точка пересечения медиан треугольника ABM , поскольку делит его медиану MK в отношении $2 : 1$ считая от вершины. Очевидно проекцией отрезка MK на плоскость ABC будет отрезок CK , поэтому точка Q спроецируется в такую точку, которая делит CK в отношении $2 : 1$ – то есть в точку пересечения медиан треугольника ABC (точку O). Поскольку $OO_1 \perp ABC$, отсюда следует, что $Q \in OO_1$, что и требовалось доказать.

$$б) V_{ABMC_1} = V_{ABCC_1} - V_{ABCM} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot CC_1 - \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot CM = \frac{1}{3}(CC_1 - CM)S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

548808 а) Пусть K – середина ребра AB , Q – такая точка на MK , что $MQ : QK = 2 : 1$. Тогда Q – точка пересечения медиан треугольника ABM , поскольку делит его медиану MK в отношении $2 : 1$ считая от вершины. Очевидно проекцией отрезка MK на плоскость ABC будет отрезок CK , поэтому точка Q спроецируется в такую точку, которая делит CK в отношении $2 : 1$ – то есть в точку пересечения медиан треугольника ABC (точку O). Поскольку $OO_1 \perp ABC$, отсюда следует, что $Q \in OO_1$, что и требовалось доказать.

$$б) V_{ABMC_1} = V_{ABCC_1} - V_{ABCM} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot CC_1 - \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot CM = \frac{1}{3}(CC_1 - CM)S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

548852 а) Пусть K – середина ребра AB , Q – такая точка на MK , что $MQ : QK = 2 : 1$. Тогда Q – точка пересечения медиан треугольника ABM , поскольку делит его медиану MK в отношении $2 : 1$ считая от вершины. Очевидно проекцией отрезка MK на плоскость ABC будет отрезок CK , поэтому точка Q спроецируется в такую точку, которая делит CK в отношении $2 : 1$ – то есть в точку пересечения медиан треугольника ABC (точку O). Поскольку $OO_1 \perp ABC$, отсюда следует, что $Q \in OO_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть T – середина A_1B_1 . Поскольку $A_1B_1 \parallel AB$, то $A_1B_1 \parallel ABM$ и $d(A_1, ABM) = d(T, ABM)$. Опустим из T перпендикуляр TS на KM . Докажем, что это и есть искомое расстояние.

В самом деле $TS \perp KM$ по построению. Кроме того, $TS \subset KTC_1C$, а $AB \perp KTC_1C$ (поскольку $AB \perp KC$ и $AB \perp CC_1$). Следовательно, AB перпендикулярно любой прямой в плоскости KTC_1C , в частности $TS \perp AB$. Итак, TS перпендикулярно двум пересекающимся прямым в плоскости ABM и потому является перпендикуляром к плоскости.

Рассмотрим треугольник TKM . В нем $TK = AA_1 = 7$ и $KM = \sqrt{KC^2 + CM^2} = \sqrt{AC^2 - AK^2 + CM^2} = \sqrt{8^2 - 4^2 + 1^2} = 7$, то есть треугольник TKM – равнобедренный. Следовательно $TS = d(T, KM) = d(M, TK) = d(C, TK) = CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = 4\sqrt{3}$.

549114 а) Обозначим за T середину ребра AB . Отметим сразу, что $QT \perp AB$, $QT = \frac{1}{2}AB$, $TM = \frac{1}{2}AC$ (последнее из свойства средней линии). Заметим, что $\overline{KN} = \overline{KC_1} + \overline{C_1N} = \frac{1}{2}\overline{A_1C_1} + \frac{1}{2}\overline{C_1C} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{A_1A} = \overline{TM} + \frac{1}{2}\overline{QT} = \overline{QM}$, то есть прямые KN и QM параллельны. Значит они лежат в одной плоскости.

б) Построим это сечение. Продлим KN до пересечения с продолжением AC в точке P , тогда треугольники KC_1N и PCN равны по катету и острому углу, откуда $PC = KC_1 = \frac{1}{2}AC$. Теперь продлим отрезок PM до пересечения с AB в точке S . По теореме Менелая для треугольника ABC и прямой SMP получим $\frac{AS}{SB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$, откуда $AS : SB = 3$. Продлим теперь SQ до пересечения с A_1B_1 в точке L . Эта точка симметрична S относительно Q , поэтому $A_1L : LB = 1 : 3$. Пятиугольник $LKNMS$ – сечение.

Найдем его площадь. Продлим SL и PK до пересечения в точке Z , лежащей на AA_1 . Тогда $S_{LKNMS} = S_{SZP} - S_{MNP} - S_{LZK}$.

Заметим, что $d(S, AC) = \frac{3}{4}d(B, AC) = \frac{3}{2}d(M, AC)$, откуда следует, что $SP : MP = 3 : 2$, то есть $SM = \frac{1}{3}SP$. Далее, треугольники LA_1K и SBM равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $LK = \frac{1}{3}SP$. Кроме того $LK \parallel SP$ как прямые, по которым плоскость пересекает параллельные основания призмы. Значит треугольники ZKL и ZPS подобны с коэффициентом 3. То есть $ZK = \frac{1}{3}ZP$, $KN = NP$ потому $ZK = KN$. Аналогично $ZL = LQ = QS$ и треугольники ZPS и QMS подобны по трем сторонам с коэффициентом 3 (в пункте а уже было доказано, что $QM = KN$). Получаем тогда.

$S_{SZP} - S_{MNP} - S_{LZK} = S_{SZP} - \frac{1}{9}S_{SZP} - \frac{PN}{PZ} \cdot \frac{PM}{PS} S_{SZP} = S_{SZP}(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}S_{SZP} = 6S_{QMS}$. Осталось найти площадь треугольника QMS . Вычислим для этого его стороны.

$$QM = KN = \sqrt{KC_1^2 + C_1N^2} = \frac{1}{2}\sqrt{A_1C_1^2 + C_1C^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + 2^2} = 3\sqrt{2}$$

$$QS = \sqrt{QT^2 + TS^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2 + TB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$$

$$SM = \frac{1}{2}TC \text{ (как средняя линия треугольника } TBC), \text{ то есть } SM = \frac{1}{2}TC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot 8 = 2\sqrt{3}$$

Отсюда видно, что $18 = QM^2 = QS^2 + SM^2 = 6 + 12$, то есть треугольник MSQ прямоугольный и имеет площадь $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$. Окончательно $S_{LKNMS} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.

(на самом деле он всегда прямоугольный, поскольку $SM \parallel TB$, а $TB \perp A_1B_1BA$, поэтому TB (и SM) перпендикулярно QS .)

КЛОН сторона основания 4, боковое ребро $2\sqrt{7}$

а) Обозначим за T середину ребра AB . Отметим сразу, что $QT \perp AB$, $QT = \frac{1}{2}AB$, $TM = \frac{1}{2}AC$ (последнее из свойства средней линии). Заметим, что $\overline{KN} = \overline{KC_1} + \overline{C_1N} = \frac{1}{2}\overline{A_1C_1} + \frac{1}{2}\overline{C_1C} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{A_1A} = \overline{TM} + \frac{1}{2}\overline{QT} = \overline{QM}$, то есть прямые KN и QM параллельны. Значит они лежат в одной плоскости.

б) Построим это сечение. Продлим KN до пересечения с продолжением AC в точке P , тогда треугольники KC_1N и PCN равны по катету и острому углу, откуда $PC = KC_1 = \frac{1}{2}AC$. Теперь продлим отрезок PM до пересечения с AB в точке S . По теореме Менелая для треугольника ABC и прямой SMP получим $\frac{AS}{SB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$, откуда $AS : SB = 3$. Продлим теперь SQ до пересечения с A_1B_1 в точке L . Эта точка симметрична S относительно Q , поэтому $A_1L : LB = 1 : 3$. Пятиугольник $LKNMS$ – сечение.

Найдем его площадь. Продлим SL и PK до пересечения в точке Z , лежащей на AA_1 . Тогда $S_{LKNMS} = S_{SZP} - S_{MNP} - S_{LZK}$.

Заметим, что $d(S, AC) = \frac{3}{4}d(B, AC) = \frac{3}{2}d(M, AC)$, откуда следует, что $SP : MP = 3 : 2$, то есть $SM = \frac{1}{3}SP$. Далее, треугольники LA_1K и SBM равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $LK = \frac{1}{3}SP$. Кроме того $LK \parallel SP$ как прямые, по которым плоскость пересекает параллельные основания призмы. Значит треугольники ZKL и ZPS подобны с коэффициентом 3. То есть $ZK = \frac{1}{3}ZP$, $KN = NP$ потому $ZK = KN$. Аналогично $ZL = LQ = QS$ и треугольники ZPS и QMS подобны по трем сторонам с коэффициентом 3 (в пункте a уже было доказано, что $QM = KN$). Получаем тогда.

$S_{SZP} - S_{MNP} - S_{LZK} = S_{SZP} - \frac{1}{9}S_{SZP} - \frac{PN}{PZ} \cdot \frac{PM}{PS} S_{SZP} = S_{SZP}(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}S_{SZP} = 6S_{QMS}$. Осталось найти площадь треугольника QMS . Вычислим для этого его стороны.

$$QM = KN = \sqrt{KC_1^2 + C_1N^2} = \frac{1}{2}\sqrt{A_1C_1^2 + C_1C^2} = \frac{1}{2}\sqrt{44} = \sqrt{11}$$

$$QS = \sqrt{QT^2 + TS^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2 + TB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$

$$SM = \frac{1}{2}TC \text{ (как средняя линия треугольника } TBC), \text{ то есть } SM = \frac{1}{2}TC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot 4 = \sqrt{3}$$

Отсюда видно, что $11 = QM^2 = QS^2 + SM^2 = 3 + 8$, то есть треугольник MSQ прямоугольный и имеет площадь $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$. Окончательно $S_{LKNMS} = 6 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$.

(на самом деле он всегда прямоугольный, поскольку $SM \parallel TB$, а $TB \perp A_1B_1BA$, поэтому TB (и SM) перпендикулярно QS .)

548802) Преобразуем условие

$$3 \cdot 45^x - 3 \cdot 27^x - 28 \cdot 15^x + 28 \cdot 9^x + 9 \cdot 5^x - 3^{x+2} \leq 0$$

$$3 \cdot 45^x - 3 \cdot 27^x - 28 \cdot 15^x + 28 \cdot 9^x + 9 \cdot 5^x - 9 \cdot 3^x \leq 0$$

$$3 \cdot 3^{2x}(5^x - 3^x) - 28 \cdot 3^x(5^x - 3^x) + 9(5^x - 3^x) \leq 0$$

$$(3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9)(5^x - 3^x) \leq 0$$

Раскладывая на множители квадратный трехчлен $3t^2 - 28t + 9$, получим $(3t - 1)(t - 9)$, поэтому неравенство можно преобразовать дальше

$$(3 \cdot 3^x - 1)(3^x - 9)(5^x - 3^x) \leq 0$$

$$(3^x - 3^{-1})(3^x - 3^2)(5^x - 3^x) \leq 0$$

Применим теперь рационализацию, заменив каждый множитель на рациональный, имеющий с ним одинаковые знаки

$$(x + 1)(x - 2)x \leq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [0; 2]$$

$$\text{Ответ } x \in (-\infty; -1] \cup [0; 2]$$

548853) Преобразуем условие

$$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} + 12 \cdot 15^x - 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$$

$$27 \cdot 45^x - 27 \cdot 27^x + 12 \cdot 15^x - 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$$

$$27 \cdot 3^{2x}(5^x - 3^x) + 12 \cdot 3^x(5^x - 3^x) + (5^x - 3^x) \leq 0$$

$$(27 \cdot 3^{2x} + 12 \cdot 3^x + 1)(5^x - 3^x) \leq 0$$

Первый множитель всегда положителен и на знак не влияет (возможно там надо -12 сделать, поменяв условие?)

$$5^x - 3^x \leq 0$$

$$5^x \leq 3^x$$

$$x \leq 0$$

$$\text{ответ } x \leq 0$$

548809) Преобразуем условие

$$2 \cdot 20^x - 17 \cdot 10^x - 2 \cdot 8^x + 8 \cdot 5^x + 17 \cdot 4^x - 2^{x+3} \leq 0$$

$$2 \cdot 20^x - 2 \cdot 8^x - 17 \cdot 10^x + 17 \cdot 4^x + 8 \cdot 5^x - 8 \cdot 2^x \leq 0$$

$$2 \cdot 4^x(5^x - 2^x) - 17 \cdot 2^x(5^x - 2^x) + 8(5^x - 2^x) \leq 0$$

$$(2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8)(5^x - 2^x) \leq 0$$

Раскладывая на множители квадратный трехчлен $2t^2 - 17t + 8$, получим $(2t - 1)(t - 8)$, поэтому неравенство можно преобразовать дальше

$$(2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 8)(5^x - 2^x) \leq 0$$

$$(2^x - 2^{-1})(2^x - 2^3)(5^x - 2^x) \leq 0$$

Применим теперь рационализацию, заменив каждый множитель на рациональный, имеющий с ним одинаковые знаки

$$(x + 1)(x - 3)x \leq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [0; 3]$$

$$\text{Ответ } x \in (-\infty; -1] \cup [0; 3]$$

548810) а) Обозначим высоту трапеции за $2h$, тогда $d(M, AD) = d(M, BC) = h$. Следовательно $S_{ABM} = S_{ABCD} - S_{BCM} - S_{ADM} = \frac{AD+BC}{2} \cdot 2h - \frac{1}{2}BC \cdot h - \frac{1}{2}AD \cdot h = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot 2h = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

б) Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке E . Поскольку $BC = \frac{1}{2}AD$, отрезок BC будет средней линией треугольника AED . Далее, $S_{AKD} = 2S_{BKC}$, откуда $\frac{1}{2}AD \cdot d(K, AD) = 2 \cdot \frac{1}{2}BC \cdot d(K, BC)$, откуда, учитывая $AD = 2BC$ следует, что $d(K, AD) = d(K, BC)$, то есть точка K лежит на средней линии трапеции. Значит K – середина CD

В таком случае $d(K, AB) : d(D, AB) = KE : DE$ (из подобия прямоугольных треугольников DH_1E и KH_2E , где DH_1 и KH_2 – перпендикуляры к AB). Следовательно, $d(K, AB) = 15 \cdot \frac{KE}{DE} = 15 \cdot \frac{KC+CE}{2CD} = 15 \cdot \frac{\frac{1}{2}CD+CD}{2CD} = 15 \cdot \frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$

548803) а) Обозначим высоту трапеции за $2h$, тогда $d(M, AD) = d(M, BC) = h$. Следовательно $S_{ABM} = S_{ABCD} - S_{BCM} - S_{ADM} = \frac{AD+BC}{2} \cdot 2h - \frac{1}{2}BC \cdot h - \frac{1}{2}AD \cdot h = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot 2h = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

б) Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке E . Поскольку $BC = \frac{1}{2}AD$, отрезок BC будет средней линией треугольника AED . Далее, $S_{AKD} = 2S_{BKC}$, откуда $\frac{1}{2}AD \cdot d(K, AD) = 2 \cdot \frac{1}{2}BC \cdot d(K, BC)$, откуда, учитывая $AD = 2BC$ следует, что $d(K, AD) = d(K, BC)$, то есть точка K лежит на средней линии трапеции. Значит K – середина CD

В таком случае $d(K, AB) : d(D, AB) = KE : DE$ (из подобия прямоугольных треугольников DH_1E и KH_2E , где DH_1 и KH_2 – перпендикуляры к AB). Следовательно, $d(K, AB) = 10 \cdot \frac{KE}{DE} = 10 \cdot \frac{KC+CE}{2CD} = 10 \cdot \frac{\frac{1}{2}CD+CD}{2CD} = 10 \cdot \frac{3}{4} = 7\frac{1}{2}$

549116) а) Заметим, что $\angle BDA = 90^\circ$, поскольку этот угол опирается на диаметр AB . То есть BD – высота прямоугольного треугольника ABC . По свойству высоты получаем, что $BD = \sqrt{CD \cdot AD}$, то есть $BD^2 = CD \cdot AD$. кроме того, треугольники EOB и DOA равны по двум сторонам и углу между ними, значит $EB = AD$, откуда $BD^2 = CD \cdot AD = CD \cdot BE$.

б) $S_{FBE} = S_{OBF} + S_{OBE} = \frac{1}{2}OB \cdot BF + S_{AOD} = \frac{1}{2}OB \cdot BF + \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{1}{2}OB \cdot BF + \frac{1}{4}AD \cdot BD$. Теперь остается вычислить длины всех этих отрезков.

$$BD = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{36+18}} = 2\sqrt{3}$$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}$$

$$CD = AC - AD = \sqrt{AB^2 + BC^2} - 2\sqrt{6} = \sqrt{54} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

Применим теорему Менелая для треугольника ABC и прямой ODF . Получим $\frac{BO}{OA} \cdot \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CF}{FB} = 1$, откуда $BF = 2CF$, то есть C – середина BF и $BF = 6\sqrt{2}$.

$$\text{Наконец, } \frac{1}{2}OB \cdot BF + \frac{1}{4}AD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{2}$$

$$\text{КЛОН } AB = 10, BC = 5$$

а) Заметим, что $\angle BDA = 90^\circ$, поскольку этот угол опирается на диаметр AB . То есть BD – высота прямоугольного треугольника ABC . По свойству высоты получаем, что $BD = \sqrt{CD \cdot AD}$, то есть $BD^2 = CD \cdot AD$. кроме того, треугольники EOB и DOA равны по двум сторонам и углу между ними, значит $EB = AD$, откуда $BD^2 = CD \cdot AD = CD \cdot BE$.

б) $S_{FBE} = S_{OBF} + S_{OBE} = \frac{1}{2}OB \cdot BF + S_{AOD} = \frac{1}{2}OB \cdot BF + \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{1}{2}OB \cdot BF + \frac{1}{4}AD \cdot BD$. Теперь остается вычислить длины всех этих отрезков.

$$BD = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{10 \cdot 5}{\sqrt{100+25}} = 2\sqrt{5}$$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{100 - 20} = 4\sqrt{5}$$

$$CD = AC - AD = \sqrt{AB^2 + BC^2} - 4\sqrt{5} = \sqrt{125} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Применим теорему Менелая для треугольника ABC и прямой ODF . Получим $\frac{BO}{OA} \cdot \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CF}{FB} = 1$, откуда $BF = 4CF$, значит $5 = BC = \frac{3}{4}BF$ и $BF = \frac{20}{3}$

$$\text{Наконец, } \frac{1}{2}OB \cdot BF + \frac{1}{4}AD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{20}{3} + \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{80}{3}$$

548817) эта задача совпадает с 549116, кроме того, что не дан диаметр круга. Очевидно без этого данного задача не решается, поскольку $S_{FBE} \geq S_{BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot BC$ и может быть сделано сколь угодно большим выбором очень большого BO – радиуса окружности.

548854) а) Заметим сразу, что N – центр описанной окружности треугольника ABC . Пусть $\angle CAB = \alpha$. Треугольник ANC – равнобедренный, поэтому $\angle ACN = \alpha$ и $\angle LCN = \angle ACN - \angle ACL = \alpha - 45^\circ$. Треугольник CLN также равнобедренный, поэтому $\angle CLN = \alpha - 45^\circ$. Теперь вычислим $\angle LMB$ как внешний угол в треугольнике LMC :

$$\angle LMB = \angle LCM + \angle CLM = 45^\circ + \alpha - 45^\circ = \alpha = \angle CAB, \text{ что и требовалось доказать.}$$

б) Рассмотрим треугольник CMN . В нем $CN = AN = \frac{1}{2}AB = 10$, $CM = 3\sqrt{5}$, $\angle CMN = 180^\circ - \angle NMB = 180^\circ - \alpha$, $\angle NCM = \angle LCM - \angle LCN = 45^\circ - (\alpha - 45^\circ) = 90^\circ - \alpha$, поэтому $\angle CNM = 180^\circ - \angle NCM - \angle CMN = 2\alpha - 90^\circ$.

Напишем теперь теорему синусов.

$$\frac{10}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{3\sqrt{5}}{\sin(2\alpha - 90^\circ)}$$

$$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{-\cos 2\alpha}$$

$$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \sin^2 \alpha - 1}$$

Обозначим $\sin \alpha = t$, тогда

$$10(2t^2 - 1) = 3\sqrt{5}t$$

$$20t^2 - 3\sqrt{5}t - 10 = 0$$

$$t = \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{845}}{40}$$

Очевидно $\sin \alpha > 0$, поэтому $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{845}}{40} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{845}}{40} = \frac{3\sqrt{5} + 13\sqrt{5}}{40} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. В таком случае $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
и $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \sin \alpha \cdot AB \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \frac{2}{5} = 80$.

548495 У этой задачи что-то не так в условии, нарисовать картинку не удастся.

548435 В задаче очевидно перепутаны числа. Если в июле 2029 года долг будет составлять 5 миллионов, то выплатить его двумя платежами по 338 тысяч нельзя будет даже без учета начисления процентов.

548489 Обозначим за p величину $1 + 0,01r$ - это множитель, на который банк каждый год умножает размер долга. Тогда после первого года долг будет равен $300000p - 260000$, после начисления процентов он станет $(300000p - 260000)p$ и это равно второму платежу. Получаем уравнение

$(300000p - 260000)p = 169000$ $300p^2 - 260p - 169 = 0$ $p = \frac{260 \pm \sqrt{260^2 + 1200 \cdot 169}}{600} = \frac{260 \pm 10\sqrt{26^2 + 12 \cdot 169}}{600} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 + 12 \cdot 169}}{60} = \frac{26 \pm 13\sqrt{2^2 + 12}}{60} = \frac{26 \pm 13 \cdot 4}{60} = \frac{78}{60} = 1,3$ (второй корень мы отбрасываем, поскольку он отрицательный). Итак, $1 + 0,01r = 1,3$, откуда $r = 30$.

548804 Пусть в банк был положено x миллионов рублей. После двух лет сумма вклада составит $1,1 \cdot 1,1x = 1,21x$ и мы добавим еще 3 миллиона. Затем банк начислит проценты и сумма вклада станет $1,1(1,21x + 3) = 1,331x + 3,3$, а мы добавим еще 3 миллиона. Наконец, после начисления процентов за четвертый год сумма вклада станет $1,1(1,331x + 6,3) = 1,4641x + 6,93$, что превосходит положенную нами сумму $x + 3 + 3$ на $0,4641x + 0,93$. По условию $0,4641x + 0,93 > 5$, откуда $x > \frac{4,07}{0,4641} = \frac{40700}{4641} = 8,7 \dots$ Поэтому наименьшее целое x это 9

548811 Пусть в банк был положено x миллионов рублей. После двух лет сумма вклада составит $1,1 \cdot 1,1x = 1,21x$ и мы добавим еще 5 миллионов. Затем банк начислит проценты и сумма вклада станет $1,1(1,21x + 5) = 1,331x + 5,5$, а мы добавим еще 5 миллионов. Наконец, после начисления процентов за четвертый год сумма вклада станет $1,1(1,331x + 10,5) = 1,4641x + 11,55$, что превосходит положенную нами сумму $x + 5 + 5$ на $0,4641x + 1,55$. По условию $0,4641x + 1,55 > 10$, откуда $x > \frac{8,45}{0,4641} = \frac{84500}{4641} = 18,2 \dots$ Поэтому наименьшее целое x это 19

548818 Когда банк начислит проценты на суммы $S; 0,8S; 0,4S$, получается размер долга соответственно $1,2S; 1,2 \cdot 0,8S = 0,96S; 1,2 \cdot 0,4S = 0,48S$. Значит размеры выплат составят $1,2S - 0,8S = 0,4S; 0,96S - 0,4S = 0,56S; 0,48S - 0 = 0,48S$. Наибольшая из них - вторая выплата, она должна быть не больше 840 тысяч и если это будет так, то остальные выплаты тоже будут не больше 840 тысяч.

Получаем неравенство $0,56S \leq 840$, $S \leq \frac{840}{0,56} = 1500$. Значит максимальный размер кредита составит 1500 тыс. рублей.

547119 эта задача совпадает с 548818. В них даже опечатки одинаковые - 2019 год вместо 2029.

539884 эта задача уже есть с решением на сайте под номером 521403

548436 Очевидно что при любом a пара $x = y = 0$ является решением данной системы.

548856 Перепишем первое уравнение в виде $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$, то есть $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Значит оно задает окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(1; 1)$.

Перепишем второе уравнение в виде $x^2 - 2(1 + a)x + (1 + a)^2 + y^2 - 2(1 - a)y + (1 - a)^2 = -2a^2 + (1 + a)^2 + (1 - a)^2$, то есть $(x - a - 1)^2 + (y + a - 1)^2 = 2$. Значит оно задает окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(a + 1; 1 - a)$. Чтобы две окружности одинакового радиуса пересекались ровно в двух точках, расстояние между их центрами должно быть меньше, чем удвоенный радиус и центры не должны совпадать. Совпадают они при $a = 0$ - этот случай мы запретим. Осталось потребовать, чтобы

$$\sqrt{(a + 1 - 1)^2 + (1 - a - 1)^2} < 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2a^2} < 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a^2} < 2$$

$$|a| < 2$$

Окончательно, $a \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

549118 Разберем сразу случай, когда $\cos \alpha = 0$. Тогда уравнение примет вид $2x^2 \sin \alpha = 0$ и будет иметь лишь один корень.

В остальных случаях можно поделить уравнение на $\cos \alpha$ и сделать замену $t = x^2$. Получим

$$t^2 + 2t \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$$

Каждому его положительному корню t соответствуют два различных значения x , а каждому отрицательному - ни одного. Корня $t = 0$ у него вообще быть не может.

Значит для того, чтобы было ровно два подходящих значения x , нужно, чтобы у этого квадратного уравнения был ровно один положительный корень. Ясно, что если у него два корня, то они одного знака (по теореме Виета их произведение равно 1), поэтому нас устроит только ситуация, когда у него всего один корень, то есть когда его дискриминант равен нулю.

$4t \operatorname{tg}^2 \alpha - 4 = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$. Уравнения получаются $x^2 - 2x + 1 = 0$ и $x^2 + 2x + 1 = 0$. У второго единственный корень отрицательный, оно нам не подойдет.

Итак, единственный подходящий случай это $\operatorname{tg} \alpha = -1$, то есть $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

548486

а) Да. Пусть, например, по кругу стояли мальчик с 36 конфетами, девочка с 12, мальчик с 36, девочка с 16. Они отдали 12, 3, 9 и 4 конфеты соответственно и теперь у них стало 28, 21, 30, 21 конфет.

б) Да. Пусть, например, у них было 108, 108, 108, 12, 108, 108, 24 конфеты (мальчики имели по 108), а передали они по 27, 27, 36, 3, 36, 27, 6 конфет. Тогда у них станет 87, 108, 99, 45, 84, 117, 45 конфет - у обеих девочек по 45, а у мальчиков не поровну.

в) Допустим, что это возможно. Тогда есть минимум пять мальчиков, отдавших поровну конфет. Посмотрим на тех, кому они отдавали конфеты - минимум трое из них одного пола. Из этих троих минимум двое отдают одинаковую часть своих конфет.

Если эти двое - мальчики, то они поровну получили и поровну отдали (равные части от равных количеств), поэтому у них осталось поровну.

Если же это девочки, то они имели не поровну конфет, оставили себе одинаковые части ($\frac{3}{4}$ или $\frac{2}{3}$) от неравных количеств - то есть не поровну, а получили поровну. Значит сейчас у них не поровну.

Ответ да, да, нет.

549119

а) Например можно взять $x^2 + 5x + 2$

б) Если бы это было возможно, то выполнялось бы равенство $m^2 - 4n = 54$, откуда $m^2 = 54 + 4n$. Если m четно, то m^2 кратно 4, а $54 + 4n$ не кратно 4. Если же m нечетно, то m^2 тоже нечетно, а $54 + 4n$ четно.

в) его дискриминант равен $(3m + n)^2 - 4(3n + m) = (3m + n)^2 - 12n - 4m = (3m + n)^2 - 12(3m + n) + 32m = (3m + n)^2 - 12(3m + n) + 36 + 32m - 36 = (3m + n - 6)^2 + 32m - 36$.

Возьмем $m = 1$. Тогда получим $(n - 3)^2 + 32 - 36 = (n - 3)^2 - 4 = n^2 - 6n + 5 = (n - 1)(n - 5)$. При $n \in [1; 5]$ это выражение неположительно, а при $n \geq 6$ оно возрастает с ростом n , поэтому оптимальный вариант будет при $n = 6$. Дискриминант в этом случае будет равен 5. Трехчлен получится таким $-x^2 + 9x + 19$

Если взять $m \geq 2$, то это выражение будет не меньше $0^2 + 32 \cdot 2 - 36 = 28$.

КЛОН бывает ли 33, бывает ли 26, наименьший для $x^2 + (5m + n)x + (8n + m)$

а) Например можно взять $x^2 + 7x + 4$

б) Если бы это было возможно, то выполнялось бы равенство $m^2 - 4n = 26$, откуда $m^2 = 26 + 4n$. Если m четно, то m^2 кратно 4, а $26 + 4n$ не кратно 4. Если же m нечетно, то m^2 тоже нечетно, а $26 + 4n$ четно.

в) его дискриминант равен $(5m + n)^2 - 4(8n + m) = (5m + n)^2 - 32n - 4m = (5m + n)^2 - 32(5m + n) + 156m = (5m + n)^2 - 32(5m + n) + 256 + 156m - 256 = (5m + n - 16)^2 + 156m - 256$

Возьмем $m = 1$. Тогда получим $(n - 11)^2 + 156 - 256 = (n - 11)^2 - 100 = (n - 1)(n - 21)$. При $n \in [1; 21]$ это выражение неположительно, а при $n \geq 22$ оно возрастает с ростом n , поэтому оптимальный вариант будет при $n = 22$. Дискриминант в этом случае будет равен 21. Трехчлен получится таким $-x^2 + 27x + 177$

Если взять $m \geq 2$, то это выражение будет не меньше $0^2 + 156 \cdot 2 - 256 = 56$.