

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что $BD_1 \perp AC$.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1 .

2. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$, высота равна $\sqrt{31}$.

а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середины ребер BD , AC и AD , является прямоугольником.

б) Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT , где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой $F_1 E_1$.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 1, а ребро основания равно 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1 .

6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$, где T — середина ребра AD .

7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$.

8. Длины ребер AB , AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .

9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что расстояние от точки C до плоскости ADD_1 меньше, чем расстояние от точки C до прямой AD_1 .

б) Найдите расстояние от точки C до прямой AD_1 .

10. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6.

а) Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ до плоскости BDC_1 .

11. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Высота призмы равна 3.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки A , A_1 и середину ребра $B_1 C_1$, перпендикулярна плоскости $A_1 BC$.

б) Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до плоскости BCA_1 .

12. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T — середины ребер AD и $A_1 B_1$ соответственно.

а) Докажите, что $A_1 C_1 \perp MT$.

б) Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT ,

13. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1, T — середина ребра AD .

- а) Докажите, что объем пирамиды $AA_1 TB$ в 12 раз меньше объема куба.
 б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$, где T — середина ребра AD .

14. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 1.

- а) Докажите, что точки B и C_1 равноудалены от плоскости ACD_1 .
 б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .

15. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $2\sqrt{10}$, высота призмы равна $2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью BCM , где M — середина ребра $A_1 C_1$, является прямоугольной трапецией.

- б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM , где M — середина ребра $A_1 C_1$.

16. Ребро основания правильной треугольной призмы $LMNL_1 M_1 N_1$ равно её высоте и равно $2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что сечение призмы, проходящее через L, M_1 и точку T — середину ребра $L_1 N_1$, является прямоугольным треугольником.

- б) Найдите расстояние от точки L_1 до плоскости $LM_1 T$.

17. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , боковая сторона которого равна $6\sqrt{3}$, а угол ACB равен 120° .

а) Докажите, что $AB_1 > AC_1$.

б) Найдите расстояние от точки A до прямой $B_1 C_1$, если известно, что боковое ребро данной призмы равно 12.

18. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.

а) Докажите, что прямые SE и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

19. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.

а) Докажите, что прямые SC и AE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой SF .

20. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, отметили середину ребра CD — точку E .

а) Докажите, что плоскость ABE перпендикулярна ребру CD .

б) Найдите расстояние от точки A до прямой BE .

21. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) Докажите, что прямые AS и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

- 22.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1.
- Докажите, что точки A_1 и B равноудалены от плоскости AB_1C_1 .
 - Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .
- 23.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 1, а ребро основания равно 2.
- Докажите, что точки A и B_1 равноудалены от плоскости A_1BC_1 .
 - Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1 .
- 24.** В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью AA_1B_1 .
- CE – высота треугольника ABC . Докажите, что угол B_1EC – прямой.
 - Найдите высоту призмы.
- 25.** Основанием прямой призмы $MNKM_1N_1K_1$ является прямоугольный треугольник MNK , у которого угол N равен 90° , угол M равен 60° , $NK = 18$. Диагональ боковой грани M_1N составляют угол 30° с плоскостью MM_1K_1 .
- NE – высота треугольника NKM . Докажите, что $\angle NM_1E = 30^\circ$
 - Найдите высоту призмы.
- 26.** Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 1.
- Докажите, что $AC_1 \perp BE$.
 - Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .
- 27.** Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1.
- Докажите, что расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1 равно расстоянию середины отрезка BC_1 до прямой, проходящей через середину отрезка AD_1 и вершину B_1 .
 - Найдите это расстояние.
- 28.** Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60° . Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC . Радиус основания конуса равен 1.
- Докажите, что треугольник ADP , где $AD \parallel BC$ и AD – хорда основания, является искомым сечением.
 - Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения.
- 29.** Отрезок KM — диаметр основания конуса, отрезок AK — образующая этого конуса, которая в 3 раза больше радиуса его основания. Хорда основания ML составляет с прямой KM угол 45° . Через AK проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой ML .
- Докажите, что треугольник AKN , где KN – хорда основания, параллельная ML , является искомым сечением.
 - Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

- 30.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2.
- Докажите, что точки B и S равноудалены от плоскости ADM , где M — середина ребра SC .
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM .
- 31.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2.
- Докажите, что точки B и S равноудалены от плоскости ADM , где M — середина ребра SC .
 - Найдите расстояние от точки S до плоскости ADM .
- 32.** Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB .
- Докажите, что плоскости AOL и MDB перпендикулярны.
 - Найдите высоту данной пирамиды.
- 33.** Длины ребер AB , AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15.
- Докажите, что расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 B$ больше, чем расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .
 - Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 .
- 34.** Длины ребер BC , BB_1 и BA прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 8, 12 и 9.
- Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой $D_1 C$ больше, чем расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 C$.
 - Найдите расстояние от вершины D_1 до прямой $A_1 C$.
- 35.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6.
- Докажите, что $AS \perp BC$.
 - Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .
- 36.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.
- Докажите, что плоскости DEA_1 и BDD_1 перпендикулярны.
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1 .
- 37.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 4.
- Докажите, что плоскости $CD_1 E_1$ и AEE_1 перпендикулярны.
 - Найдите расстояние от точки C до прямой $D_1 E_1$.
- 38.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра равны 1.
- Докажите, что прямая BF_1 перпендикулярна прямой $F_1 E_1$.
 - Найдите расстояние от точки B до прямой $E_1 F_1$.
- 39.** Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Сторона основания пирамиды равна $\sqrt{6}$, высота равна $\sqrt{30}$.
- Докажите, что сечение, проходящее через середину бокового ребра BD и точки M и T (середины ребер AC и AB соответственно), является прямоугольником.
 - Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT .

- 40.** Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$.
- Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середину ребра AD и точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно, является равнобедренной трапецией.
 - Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT .
- 41.** Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$ а угол BAD равен 60° .
- Докажите, что прямые AC_1 и BD перпендикулярны.
 - Найдите расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.
- 42.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 3, а сторона основания равна 2.
- Докажите, что высоты пирамиды, проведенные из вершин A и S , пересекаются в одной точке.
 - Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .
- 43.** Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1.
- Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна плоскости ACD_1 .
 - Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .
- 44.** В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ высота равна 1, а сторона основания равна $\sqrt{2}$. Точка M — середина ребра AA_1 .
- Докажите, что пирамиды $MDD_1 C_1$ и $ACDD_1$ равновелики.
 - Найдите расстояние от точки M до плоскости $DA_1 C_1$.
- 45.** В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны, $AD = BC$, $\angle DAC = \frac{\pi}{2}$, $\angle ACD = \frac{\pi}{4}$, угол между ребром DC и гранью ABC равен $\frac{\pi}{6}$.
- Докажите, что середина ребра AB равноудалена от плоскости ACD и плоскости BCD .
 - Найдите угол между ребром AB и гранью ACD .
- 46.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB=1$, высота $SO=2$, точка M — середина ребра BS .
- Докажите, что AM параллельна FN , где N — середина ребра SE .
 - Найдите расстояние от точки E до прямой AM .
- 47.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 4. Точка N — середина отрезка AC .
- Докажите, что плоскость $NA_1 D$ делит сторону AB основания призмы в отношении 2 : 1.
 - Найдите расстояние от вершины A до плоскости $NA_1 D$.
- 48.** В правильной четырехугольной пирамиде плоскость α , проведенная через сторону основания, делит двугранный угол при основании пирамиды и боковую поверхность пирамиды пополам.
- Докажите, что двугранный угол при основании пирамиды равен 45° .
 - Найдите расстояние от плоскости α до вершины пирамиды, если сторона основания пирамиды равна 1.

49. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Точка P — середина BC , на ребре AS отмечена точка N , причем PN перпендикулярна AS .

а) Доказать, что $\sin \angle ASO = \frac{NO}{PS}$.

б) Найдите расстояние от точки O до плоскости SBC , если $AB = 12\sqrt{3}$, $\sin \angle ASO = \frac{3}{\sqrt{13}}$.