

Задания

Задания Д7 С2 № 521679

В правильной шестиугольной пирамиде $PABCDEF$ боковое ребро наклонено к основанию под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) Докажите, что плоскости APB и DPE перпендикулярны.

б) Найдите отношение радиуса сферы, касающейся всех граней пирамиды, к радиусу сферы, проходящей через все вершины пирамиды.

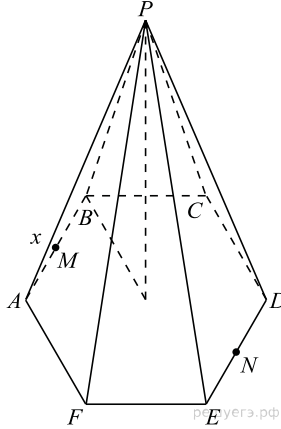
Решение.

а) Пусть M — середина AB , N — середина DE , H — основание высоты пирамиды. Пусть также $AB = x$, тогда

$$PH = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad PB = \frac{\sqrt{7}}{2}x,$$

$$PN = PM = \sqrt{PB^2 - BM^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}x,$$

$MN = AE = \sqrt{3}x$. Поскольку $PM^2 + PN^2 = MN^2$, треугольник MPN — прямоугольный. Значит, и плоскости содержащих их грани перпендикулярны, поскольку грани пересекаются по некоторой прямой, проходящей через P и параллельной AB и DE , поэтому MP и NP перпендикулярны прямой пересечения этих плоскостей.



б) Радиус вписанной сферы равен радиусу вписанной окружности PMN , а радиус описанной сферы — радиусу описанной окружности PBE . Теперь вычислим.

$$\begin{aligned} \frac{r_{PMN}}{R_{PBE}} &= \frac{S_{PMN} \cdot 4S_{PBE}}{r_{PMN} \cdot PB \cdot PE \cdot BE} = \frac{\frac{1}{2}MN \cdot PH \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}BE \cdot PH}{(PM + MN) \cdot PB^2 \cdot BE} = \\ &= \frac{MN \cdot PH^2}{(PM + MN) \cdot PB^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot x \cdot x^2 \cdot \frac{3}{4}}{x^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot (\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})x} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{7(\sqrt{6} + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{6}{7(\sqrt{2} + 1)} = \frac{6\sqrt{2} - 6}{7}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{2} - 6}{7}$.