

Треугольники

1. Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AB так, что $AD = BC = 2$.

- Докажите, что $CD = BC$.
- Найдите площадь треугольника ABC .

2. Площадь треугольника ABC равна 12. На прямой AC взята точка D так, что точка C является серединой отрезка AD . Точка K — середина стороны AB , прямая KD пересекает сторону BC в точке L .

- Докажите, что $BL : LC = 2 : 1$.
- Найдите площадь треугольника BLK .

3. Точка D делит сторону AC в отношении $AD : DC = 1 : 2$.

а) Докажите, что в треугольнике ABD найдётся медиана, равная одной из медиан треугольника DBC .

- Найдите длину этой медианы в случае, если $AB = 7$, $BC = 8$, и $AC = 9$.

4. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отложены соответственно отрезки

$$AD = \frac{1}{3}AB, BE = \frac{1}{3}BC, CF = \frac{1}{3}CA.$$

а) Докажите, что $S_{AMC} = S_{ANB} = S_{BKC}$, где $M = AE \cap CD$, $K = CD \cap BF$, $N = AE \cap BF$.
б) Найдите, какую часть от площади треугольника ABC составляет площадь треугольника MNK .

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , равны 0,6 и 0,8.

- Докажите подобие треугольников ACD и BCD , ACD и ABC .
- Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

6. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$ и $BC = 5$. На стороне AB взята точка D такая, что $AD = 1$.

а) Докажите, что CD и AB перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BDC и ADC .

7. Дан треугольник ABC , в котором $AC = CB$, а синус угла C равен 1. Треугольник ABD — равнобедренный, с боковой стороной равной 10. Найдите площадь треугольника ABC .

8. Найти высоту равнобедренного треугольника, проведенную его боковой стороне, равной 2, если синус одного его угла равен косинусу другого.

9. Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC , если $BC = 8$, а длины высот, проведенных к AC и BC , равны соответственно 6,4 и 4.

10. В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD . Найдите длину отрезка AD , если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

11. В равнобедренном треугольнике ABC AC — основание. На продолжении стороны CB за точку B отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD .

а) Докажите, что AB биссектриса угла CAD .
б) Найдите длину отрезка AD , если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

12. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка K так, что $CK : BK = 1 : 2$. Точка E — середина стороны AB . Отрезок CE и AK пересекаются в точке P .

- Докажите, что треугольники BPC и APC имеют равные площади.
- Найдите площадь треугольника ABP , если площадь треугольника ABC равна 120.

13. В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведены высота CH , медиана CM и биссектриса CL .

- Докажите, что CL является биссектрисой угла MCH .
- Найдите длину биссектрисы CL , если $CH = 3$, $CM = 5$.

14. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

А) Докажите, что треугольники AOC и C_1OA_1 подобны.
Б) Найдите площадь четырехугольника ACA_1C_1 , если известно, что угол ABC равен 30° , а площадь треугольника ABC равна 80.

15. Площадь треугольника ABC равна 72, а сумма длин сторон AC и BC равна 24.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC , если известно, что две вершины этого квадрата лежат на стороне AB .

16. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN .

А) Докажите, что углы ACB и MNB равны.
Б) Вычислите длину стороны AC , если известно, что периметр треугольника ABC равен 25 см, периметр треугольника BMN равен 15 см, а радиус окружности, описанной около треугольника BMN равен 3 см.

17. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, которая касается гипотенузы AB в точке K , а катетов — в точках P и M .

- Докажите, что площадь треугольника ABC равна $AK \cdot BK$.
- Найдите площадь треугольника PKM , если известно, что $AK = 12$, $BK = 5$.

18. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 2$ проведены медиана CM и биссектриса CL .

а) Докажите, что площадь треугольника CML составляет одну десятую часть от площади треугольника ABC .
б) Найдите угол MCL .

19. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме длин катетов.

б) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CH . Найдите сумму длин радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC , ACH и BCH , если известно, что $CH = \sqrt{5}$.

20. В прямоугольном треугольнике ABC синус угла A равен $\frac{1}{3}$. На гипотенузе AB взята точка H , а на катете AC — точка K . Известно, что прямая KH перпендикулярна гипотенузе и делит треугольник ABC на две равновеликие части.
- Докажите, что в четырёхугольник $KHBC$ можно вписать окружность.
 - Найдите радиус этой окружности, если известно, что $KH = 1$.
21. Дан треугольник ABC . В нем проведены биссектрисы AM и BN , каждая из которых равна $\frac{2772\sqrt{6}}{71}$.
- Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
 - Найдите площадь треугольника ABC , если его основание равно 132.
22. Внутри равностороннего треугольника ABC в произвольном месте поставлена точка M .
- Докажите, что сумма расстояний от точки M до сторон треугольника ABC равна высоте этого треугольника.
 - Найдите расстояние от точки M до стороны AB , если расстояние от точки M до сторон AC и BC соответственно равны $10\sqrt{133}$ и $3\sqrt{133}$, а площадь треугольника ABC равна $14364\sqrt{3}$.
23. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке C_2 . Прямые AC и AC_1 пересекаются в точке B_2 . Прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке A_2 .
- Докажите, что точки A_2 , B_2 , C_2 лежат на одной прямой.
 - Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ и площади треугольника ABC , если высоты треугольника ABC равны 2 , $\frac{10}{11}$, $\frac{5}{7}$, а высоты треугольника $A_1B_1C_1$ равны 2 , $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{9}$.
24. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC .
- Докажите, что $AD^2 = AB^2 \cdot \frac{CD}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} - CD \cdot BD$.
 - Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = 14$, $AC = 11$, $BD = 3$, $AD = \sqrt{145}$.
25. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E . Окружности ω_1 и ω_2 , вписанные в треугольники ABE и CBE , касаются прямой BE в точках соответственно.
- Докажите, что $KM = \frac{1}{2} \cdot |CE - AE|$.
 - Определите, на сколько радиус окружности ω_2 больше радиуса окружности ω_1 , если известно, что $AE = 9$, $CE = 15$, а радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4.
26. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Точки A_2 и C_2 симметричны середине стороны AC относительно прямых BC и AB соответственно.
- Докажите, что отрезки A_1A_2 и C_1C_2 лежат на параллельных прямых.
 - Найдите расстояние между точками A_2 и C_2 , если известно, что $AB = 7$, $BC = 6$, $CA = 5$.
27. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка E , при этом $BE = 4$, $EA = 5$, $BC = 6$.
- Докажите, что углы BAC и BCE равны.
 - Найдите площадь треугольника AEC , если известно, что угол ABC равен 30° .
28. Площадь треугольника ABC равна 10; площадь треугольника AHB , где H — точка пересечения высот, равна 8. На прямой CH взята такая точка K , что треугольник ABK — прямоугольный.
- Докажите, что $S_{ABK}^2 = S_{ABC} \cdot S_{AHB}$.
 - Найдите площадь треугольника ABK .
29. В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка K так, что $AK : KB = 3 : 5$. На прямой AC взята точка E так, что $AE = 2CE$. Известно, что прямые BE и CK пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника BOC равна 20.
30. Через точку T внутри треугольника ABC проведены три прямые k , l и m так, что $k \parallel AB$, $l \parallel BC$, $m \parallel AC$. Эти прямые образуют три треугольника, два из которых равны по площади.
- Докажите, что квадрат суммы квадратных корней из площадей треугольников, образованных прямыми k , l и m со сторонами треугольника ABC , равен площади этого треугольника;
 - Найдите площадь меньшего треугольника, если известно, что площадь треугольника ABC равна 25, а площадь каждого из равных треугольников равна 4.
31. Медиана AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке O .
- Докажите, что $CO = AB$.
 - Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AC = 4$, $BC = 3$.
32. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 .
- Докажите, что угол между биссектрисами AA_1 и BB_1 равен $90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}$.
 - Найдите площадь четырёхугольника ABA_1B_1 , если известно, что $AC = 4$, $AB = 5$, $BC = 6$.
33. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и BP .
- Докажите, что углы AKP и ABP равны.
 - Найдите длину отрезка PK , если известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 4$.
34. Высота равнобедренной трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) равна длине её средней линии.
- Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
 - Найдите радиус окружности, касающейся сторон AB , BC и CD трапеции, если известно, что $BC = 4$, $AD = 6$.
35. Четырёхугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.
- Докажите, что квадрат диаметра окружности равен сумме квадратов противоположных сторон четырёхугольника.
 - Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{7}$.

36. К двум окружностям, не имеющим общих точек, проведены три общие касательные: одна внешняя и две внутренние. Пусть A и B — точки пересечения общей внешней касательной с общими внутренними.

- а) Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры окружностей, одинаково удалена от точек A и B .
 б) Найдите расстояние между точками A и B , если известно, что радиусы окружностей равны 6 и 3 соответственно, а расстояние между центрами окружностей равно 15.

37. В треугольнике ABC $BA = 8$, $BC = 7$, угол B равен 120° . Вписанная в треугольник окружность ω касается стороны AC в точке M .

- а) Докажите, что $AM = BC$.
 б) Найдите длину отрезка с концами на сторонах AB и AC , перпендикулярного AB и касающегося окружности ω .

38. Точка K лежит на диаметре AB окружности с центром O . C и D — точки окружности, расположенные по одну сторону от AB , причем $\angle OCK = \angle ODK$.

- а) Докажите, что $\angle CKB = \angle DKA$.
 б) Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках A , B , C , D , если известно, что $OK = 3,6$, $BK = 9,6$, $\angle OCK = \angle ODK = 30^\circ$.

39. В окружность с центром в точке O вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . На большем катете BC взята точка D так, что $AC = BD$. Точка E — середина дуги ACB .

- а) Докажите, что угол CEB равен 90° .
 б) Найдите площадь пятиугольника $AODEC$, если известно, что $AB = 13$, $AC = 5$.

40. Окружность ω с центром в точке O касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений сторон AB и AC . Вписанная в этот треугольник окружность с центром в точке E касается стороны BC в точке K .

- а) Докажите, что $BK = CM$.
 б) Найдите площадь четырехугольника $OKEM$, если известно, что $AC = 5$, $BC = 6$, $AB = 4$.

41. В неравностороннем треугольнике ABC угол BAC равен 45° . Продолжение биссектрисы CD треугольника пересекает описанную около него окружность ω_1 в точке E . Окружность ω_2 , описанная около треугольника ADE , пересекает продолжение стороны AC в точке F .

- А) Докажите, что DE — биссектриса угла FDB .
 Б) Найдите радиус окружности ω_2 , если известно, что $AC = 6$, $AF = 2$.

42. Дан квадрат $ABCD$. Точки K , L , M — середины сторон AB , BC и CD соответственно. AL пересекает DK в точке P , DL пересекает AM в точке T , AM пересекает DK в точке O .

- А) Докажите, что точки P , L , T , O лежат на одной окружности;
 Б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $PLTO$, если $AB = 4$.

43. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и P , причем $AE : EP : PC = 1 : 2 : 1$. Прямые DE и DP пересекают стороны AB и BC в точках K и M соответственно.

- А) Докажите, что KM параллельна AC .
 Б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь пятиугольника $BKEPM$ равна 30.

44. В прямоугольном треугольнике ABC известно, что $BC = 2 \cdot AC$. На гипотенузу AB вне треугольника построен квадрат $ABEF$. Прямая CE пересекает AB в точке O .

- а) Докажите, что $OA : OB = 3 : 4$.
 б) Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOE .

45. Хорда AB окружности параллельна касательной, проходящей через точку C , лежащую на окружности. Прямая, проходящая через точку C и центр окружности, вторично пересекает окружность в точке P .

- а) Докажите, что треугольник ABP равнобедренный.
 б) Найдите отношение, в котором хорда AB делит диаметр CP , если известно, что $\angle APB = 150^\circ$.

46. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC как на стороне построен квадрат вне треугольника.

- а) Докажите, что прямая, соединяющая центр квадрата и центр вписанной в треугольник ABC окружности, проходит через точку C .
 б) Найдите расстояние между центром квадрата и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $AC = 4\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$.

47. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и P соответственно.

- а) Докажите, что периметр треугольника AMP равен стороне квадрата.
 б) Прямая MP пересекает прямую CD в точке K . Прямая, проходящая через точку K и центр окружности, пересекает прямую AB в точке E . Найдите отношение $BE : BM$, если $AM : MB = 1 : 3$.

48. Первая окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается основания AC в точке M . Вторая окружность касается основания AC и продолжений боковых сторон.

- а) Докажите, что длина основания треугольника является средним геометрическим диаметров первой и второй окружностей.
 б) Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 3, а $BM = 8$.

49. В треугольнике ABC проведена медиана BM .

- а) Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник ABM , быть в два раза меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC ?
 б) Окружности, вписанные в треугольники ABM и CBM , касаются медианы BM в точках P и K соответственно. Найдите расстояние между точками P и K , если известно, что $AB = 17$, $BC = 7$, $AC = \sqrt{177}$.

50. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $BC_1 : AC_1 = 1 : 3$, $AB_1 : CB_1 = 2 : 5$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

- а) Докажите, что площадь треугольника BOC в десять раз больше площади треугольника BOC_1 .
 б) Найдите площадь четырехугольника AB_1OC_1 , если площадь треугольника B_1OC равна 150.

51. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M , отличная от вершин, что $MC = AC$.

Точка P симметрична точке A относительно прямой BC .

а) Докажите, что около четырехугольника $BMCP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка MP , если известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $CA = 3$.

52. В треугольнике ABC стороны $AB : BC : AC = 3 : 4 : 5$. Первая окружность вписана в треугольник ABC , а вторая касается AB и продолжения сторон BC и AC .

а) Доказать, что отношение радиусов окружностей равно $2 : 1$.

б) Найти расстояние между точками касания окружностей стороны AB , если $AC = 15$.

53. В квадрате $ABCD$, со стороной равной a , точки P и Q — середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки BP и AQ пересекаются в точке R .

а) Доказать, что около четырехугольников $BCQR$ и $DRPQ$ можно описать окружности.

б) Найти расстояние между центрами этих окружностей.

54. Окружность касается прямых AB и BC соответственно в точках D и E . Точка A лежит между B и D , а точка C — между B и E . Точки A , D , E , C лежат на одной окружности.

а) Доказать, что треугольники ABC и DBE подобны.

б) Найти площадь ABC , если $AC = 8$ и радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен 1 .

55. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18 , площадь треугольника BPQ равна 2 , а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$.

а) Доказать, что треугольники QBP и CBA подобны.

б) Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

56. Две окружности пересекаются в точках A и B так, что их центры лежат по разные стороны от отрезка AB . Через точку A проведены касательные к этим окружностям AC и AE (точка C лежит на первой окружности, а точка E — на второй). Площадь четырехугольника $ACBE$ в 5 раз больше площади треугольника ABC , BD — биссектриса угла ABE (точка D лежит на хорде AE).

а) Найти отношение длин отрезков AB и BC .

б) Найти значения чисел p и q , если $\vec{AB} = p\vec{BE} + q\vec{DE}$.

57. Равнобедренные треугольники ABC ($AB = BC$) и KLM ($KM = LM$) расположены так, что M — середина AC , B — середина KL , прямая KL параллельна прямой AC . Точки R — точка пересечения KM и AB , T — BC и ML .

а) Доказать, что прямая RT параллельна прямой AC .

б) Найти площадь треугольника ABC , если $\frac{KL}{AC} = 3$ и площадь четырехугольника $BTMR$ равна 24 .

58. Отрезок AB является диаметром окружности. Точки C и D окружности расположены по разные стороны от прямой AB , длины хорд AC и BD равны 2 и 4 соответственно. Хорда CD пересекает AB в точке E , причем $AE : EB = 1 : 3$.

а) Доказать, что если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

б) Найти радиус окружности.

59. Прямоугольный треугольник ABC расположен относительно трех концентрических окружностей K_1 , K_2 и K_3 радиусов 3 , 5 и 6 так, что: 1) гипотенуза AB является хордой K_2 и касается окружности K_1 ; 2) вершина C принадлежит окружности K_3 .

а) Найти площадь треугольника ABC .

б) Доказать, что центр окружностей и вершина C лежат по разные стороны от гипотенузы.

60. В правильный треугольник со стороной a вписан круг. В этот круг вписан правильный треугольник, в который вписан круг и так далее.

а) Доказать, что площади кругов образуют геометрическую прогрессию.

б) Найдите сумму площадей всех кругов.

61. Первая окружность вписана в треугольник ABC и касается BC в точке M . Вторая окружность касается BC в точке N и продолжений сторон AC и AB .

а) Докажите, что длина MN равна модулю разности длин AB и AC .

б) Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что радиусы окружностей относятся как $1 : 3$, $BC = 12$, $MN = 4$.

62. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка P — середина стороны AF , точка K — середина стороны AB .

а) Докажите, что площади четырехугольников $DPFE$ и $DPAK$ равны.

б) Найдите площадь общей части четырехугольников $DPAK$ и $DEAC$, если известно, что $AB = 6$.

63. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно касаются друг друга в точке A , при этом O_1 лежит на ω_2 . AB — диаметр ω_1 . Хорда BC первой окружности касается ω_2 в точке P . Прямая AP вторично пересекает ω_1 в точке D .

а) Докажите, что $AP = DP$.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABDC$, если известно, что $AC = 4$.

64. Точки M и P — середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$.

Диагональ AC проходит через середину отрезка MP .

а) Докажите, что площади треугольников ABC и ACD равны.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABM , если известно, что $AB = 12$, $BC = 10$, а площадь четырехугольника $AMCP$ равна 60 .

65. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается боковых сторон AB и CD в точках K и M .

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от центра окружности до вершин трапеции равна сумме квадратов длин боковых сторон трапеции.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $AK = 9$, $BK = 4$, $CM = 1$.

66. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах AB и BC внешним и внутренним образом соответственно построены равносторонние треугольники ABK и BCP .

а) Докажите, что точка P лежит на прямой DK .

б) Найдите площадь четырехугольника $PKBC$, если известно, что $AB = 2$.

67. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Окружности ω_1 и ω_2 описаны около треугольников AOB и BOC соответственно. Пусть O_1 — центр окружности ω_1 , а O_2 — центр окружности ω_2 .

- а) Докажите, что прямая BO_1 касается окружности ω_2 , а прямая BO_2 касается окружности ω_1 .
 б) Найдите длину отрезка O_1O_2 , если известно, что $AB = 6$, $BC = 8$.

68. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне BC отмечена точка K так, что $BK = 2CK$.

- а) Докажите, что BD делит площадь треугольника AKC в отношении $3 : 7$.
 б) Пусть M — точка пересечения AK и BD , P — точка пересечения DK и AC . Найдите длину отрезка MP , если $AB = 8$, $BC = 6$.

69. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий катет AC . На нем отложен отрезок DE , длина которого равна половине отрезка AB . Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов.

- а) Докажите, что угол ACE равен 45 градусов
 б) Найдите площадь треугольника ABC .

70. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\frac{\sqrt{15}}{3}$. Окружность радиуса $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

касается вписанной в треугольник ABC окружности в точке T , а также касается лучей, образующих угол ACB . Окружности касаются прямой AC в точках K и M .

- а) Докажите, что треугольник KTM прямоугольный
 б) Найдите тангенс угла ABC , если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC .

71. Треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность. На стороне AC отмечена точка E так, что $AE = AB$. Серединный перпендикуляр к отрезку CE пересекает дугу BC , не содержащую точки A , в точке K .

- а) Докажите, что AK является биссектрисой угла BAC .
 б) Найдите площадь четырехугольника $ABKE$, если известно, что $AB = 5$, $AC = 11$, $BC = 10$.

72. AK — биссектриса треугольника ABC , причем $BK:KC=2:7$. Из точек B и K проведены параллельные прямые, которые пересекают сторону AC в точках D и F соответственно, причем $AD:FC=3:14$.

- а) Докажите, что AB в 2 раза больше AD .
 б) Найдите площадь четырехугольника $DBKF$, если P — точка пересечения BD и AK и площадь треугольника ABP равна 27.

73. Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2AC$, E — точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, причем $DE = 1$.

- а) Докажите, что $AE \parallel BC$.
 б) Найдите длину стороны AC .

74. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D . Окружность с центром O , вписанная в треугольник ADB , касается отрезка AD в точке P , а прямая OP пересекает сторону AB в точке K .

- а) Докажите, что около четырехугольника $BDOK$ можно описать окружность.
 б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$.

75. В тупоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — тупой) на высоте BH как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и CB в точках P и K соответственно.

- а) Докажите, что $\sin \angle ABC = \frac{PH}{BC} - \frac{KH}{BA}$.
 б) Найдите длину отрезка PK , если известно, что $BA = 13$, $BC = 8$, $\sin \angle ABC = \frac{7\sqrt{3}}{26}$.

76. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK и на сторонах BA и BC взяты соответственно точки M и P так, что $\angle AKM = \angle CKP = \frac{1}{2} \angle ABC$.

- а) Докажите, что прямая AC касается окружности, описанной около треугольника MBP .
 б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MBP , если известно, что $AB = 10$, $BC = 15$, $AC = 20$.

77. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $BC = \sqrt{AC \cdot CD}$.

- а) Докажите, что углы BAD и CBD равны.
 б) Найдите отношение отрезков биссектрисы CL треугольника ABC , на которые ее делит прямая BD , если известно, что $BC = 6$, $AC = 9$.

78. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC . Биссектриса CL пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке K . На стороне AC отмечена точка P так, что $\angle ALK = \angle CLP$.

- а) Докажите, что точки A, P, L, K лежат на одной окружности.
 б) Найдите площадь четырехугольника $APLK$, если $BC = 4$, $AB = 5$, $AC = 6$.

79. На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отметили точки P и Q , причем $LP = PQ = QN$.

- а) Докажите, что прямые KP и KQ проходят через середины сторон параллелограмма.
 б) Найдите отношение площади параллелограмма $KLMN$ к площади пятиугольника $MRPQS$, где R — точка пересечения KP со стороной LM , S — точка пересечения KQ с MN .

80. Точка M пересечения медиан треугольника ABC , вершина A и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности.

- а) Докажите, что треугольники AKB и BKM подобны, где K — середина стороны BC .
 б) Найдите длину AK , если $BC = 6\sqrt{3}$.

81. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , AC и BC в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

- а) Докажите, что C_1Q — биссектриса угла AC_1B_1 .
 б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 , если известно, что $BC = 9$, $AB = 10$, $AC = 17$.

82. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC (угол $C = 90^\circ$). Окружность радиуса $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает сторону AB в точке E так, что $AE : AB = 3 : 5$. Отрезки CE и AD пересекаются в точке O .
- Докажите, что $CO = OE$.
 - Найдите площадь треугольника ABC .
83. Биссектриса AD и высота BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O . Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершину A , середину стороны AC и пересекает сторону AB в точке K так, что $AK : KB = 1 : 3$.
- Докажите, что AD делит площадь треугольника ABC в соотношении $1 : 2$.
 - Найдите длину стороны BC , если радиус окружности $R = \sqrt{2}$.
84. В треугольнике ABC , где $AB = BC = 3$, $\angle ABC = \arccos \frac{1}{9}$ проведена медиана AD и биссектриса CE , пересекающиеся в точке M . Через M проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно.
- Найдите PM .
 - Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник PQB .
85. В треугольнике ABC угол C тупой, а точка D выбрана на продолжении AB за точку B так, что $\angle ACD = 135^\circ$. Точка D' симметрична точке D относительно прямой BC , точка D'' симметрична точке D' относительно прямой AC и лежит на прямой BC . Известно, что $\sqrt{3} \cdot BC = CD''$, $AC = 6$.
- Докажите, что треугольник CBD — равнобедренный.
 - Найдите площадь треугольника ABC .
86. Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и F соответственно, причем $AE : AM = 2 : 1$, $BF : BK = 3 : 2$.
- Докажите, что прямая AB параллельна прямой CE .
 - Найти углы треугольника ABC .
87. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC расположены точки E и D соответственно так, что AD — биссектриса треугольника ABC , DE — биссектриса треугольника ABD ,
- $$AE = ED = \frac{9}{16}, CD = \frac{3}{4}.$$
- Найдите AC .
 - Найдите площадь треугольника ABC .
88. В окружности с центром в точке O радиуса 4 проведены хорда AB и диаметр AK , образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C .
- Докажите, что треугольник OBC — равнобедренный
 - Найдите длину медианы AM треугольника ABC .
89. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O . Окружность с центром в точке O проходит через вершину A , касается стороны BC в точке K и пересекает сторону AC в точке M такой, что $AM : MC = 4 : 1$.
- Найдите отношение $CK : KB$.
 - Найдите длину стороны AB , если радиус окружности равен 2.
90. Четырехугольник, один из углов которого равен $\arccos \left(\frac{3}{5} \right)$, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{10}$ и описан около окружности радиуса 3.
- Найдите площадь четырехугольника.
 - Найдите угол между диагоналями четырехугольника.
91. Дан треугольник ABC , в котором $AB = BC = 5$, медиана $AD = \frac{\sqrt{97}}{2}$. На биссектрисе CE выбрана точка F такая, что $CE = 5CF$. Через точку F проведена прямая l , параллельная BC .
- Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC до прямой l .
 - Найдите, в каком отношении прямая l делит площадь треугольника ABC .
92. В прямоугольном треугольнике ABC из точки E , расположенной в середине катета BC , опущен перпендикуляр EL на гипотенузу AB , $AE = \sqrt{10}EL$, $BC > AC$.
- Найдите углы треугольника ABC .
 - Найдите отношение $\frac{AE}{CL}$.
93. На катете ML прямоугольного треугольника KLM как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону KL в точке P . На стороне KM взята точка R так, что отрезок LR пересекает окружность в точке Q , причем отрезки QP и ML параллельны, $KR = 2RM$ и $ML = 8\sqrt{3}$.
- Найдите отношение $LP : PK$.
 - Найти MQ .
94. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые CM и BN пересекаются в точке P . Точка O — середина AP .
- Докажите, что треугольник OMN равнобедренный.
 - Найдите площадь треугольника OMN , если известно, что $AM = 3$, $BM = 9$, $AN = 4$.
95. В треугольнике ABC длина AB равна 3, $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$, хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC , пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, а длина LM равна 1.
- Найдите высоту треугольника KNC , опущенную из вершины C .
 - Найдите площадь треугольника KNC .

96. В окружность с центром O вписан треугольник ABC ($\angle A > \frac{\pi}{2}$). Продолжение биссектрисы AF угла A этого треугольника пересекает окружность в точке L , а радиус AO пересекает сторону BC в точке E . Пусть AH — высота треугольника ABC . Известно, что $AL = 4\sqrt{2}$, $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$, $\angle AEH = \frac{\pi}{3}$.
- Докажите, что AF — биссектриса угла EAH .
 - Найдите отношение площади треугольника OAL к площади четырехугольника $OEFL$.
97. Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P , а большее основание AD — в точке Q . Точка F лежит на отрезке EC , причем $EF : FC = EP : EQ = 1 : 3$.
- Докажите, что прямая EQ точками пересечения делит основания трапеции пополам.
 - Найдите площадь треугольника EPF .
98. Отрезок KB является биссектрисой треугольника KLM . Окружность радиуса 5 проходит через вершину K , касается стороны LM в точке B и пересекает сторону KL в точке A . Известно, что $ML = 9\sqrt{3}$, $KA : LB = 5 : 6$.
- Найдите угол K треугольника KLM .
 - Найдите площадь треугольника KLM .
99. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .
- Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.
 - Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$.
100. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.
- Докажите, что углы ABH и CBO равны.
 - Найдите BH , если $AB = 16$, $BC = 18$, $BH = BO$.
101. Окружность радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках K и P и пересекает сторону AB в точках M и N (точка N между точками B и M). Известно, что MP и AC параллельны, $CK = 2$, $BP = 6$.
- Найдите угол BCA .
 - Найдите площадь треугольника BKN .
102. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB , $BC > AC$. На катете BC взята точка K такая, что $\angle MKC = \angle BAC$.
- Докажите, что угол KMC прямой.
 - Пусть N — вторая (помимо M) точка пересечения прямой CM и описанной окружности треугольника BMK . Найдите угол ANB .
103. В трапеции $ABCD$ отношение оснований $AD : BC = 5 : 2$. Точка M лежит на AB , площадь трапеции $ABCD$ равна 20.
- Докажите, что площадь треугольника MCD не превосходит 15.
 - Найдите отношение $AM : MB$, если известно, что площадь треугольника MCD равна 9.
104. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника ABC , в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Отрезок $AO = 5$, а длина высоты AD равна 8.
- Докажите, что длина стороны AC треугольника ABC равна высоте, опущенной на нее из вершины B .
 - Найдите площадь треугольника ABC .
105. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE , пересекающиеся в точке P . Известно, что $AC = 26$, $DE = 10$.
- Найдите отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники DEP и ACP .
 - Найдите расстояние между серединами отрезков AC и DE .
106. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 40° , отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K .
- Докажите, что точки B_1 , B_2 , C_1 и C_2 лежат на одной окружности.
 - Найдите угол B_1KB_2 .
107. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR : RC = 1 : 2$. Точки S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AP и AQ соответственно.
- Докажите, что площади треугольников ABS и AST равны.
 - Найдите отношение площади четырехугольника $PQTS$ к площади треугольника ABC .
108. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C , и угол BCD меньше, чем $\frac{\pi}{3}$. Точка K — середина отрезка AC , точка L — середина отрезка CE , точка M — середина отрезка BD .
- Докажите, что треугольник KLM — равносторонний.
 - Найдите длину отрезка BD , если площадь треугольника KLM равна $\frac{\sqrt{3}}{5}$, а сторона треугольника ABC равна 1.
109. В треугольнике ABC , площадь которого равна 2, на медианах AK и BL и CN взяты соответственно точки P , Q и R так, что $AP = PK$, $BQ : QL = 1 : 2$, а $CR : RN = 5 : 4$.
- Докажите, что $MR : CN = 1 : 9$.
 - Найдите площадь треугольника PQR .
110. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектрисы AK , BM , CP .
- Докажите, что треугольник KMP — равнобедренный.
 - Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника KMP равна 12, а косинус угла ABC равен 0,6.