## Задания

**Задания Д10 C3 № 505998**

Решите систему неравенств $\begin{cases} 7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x}\cdot\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2}+6, \\ \log_x 2 < \log_{6-x} 2. \end{cases}$

**Решение.**

Рассмотрим второе неравенство системы. Найдем ограничения на $x$:

$$\begin{cases} 0 < x < 6 \\ x \neq 1 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\ 1)\cup(1;\ 5)\cup(5;\ 6).$$

Для таких $x$:

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(6-x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x\cdot\log_2(6-x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-x-x}{(x-1)\cdot(5-x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-1)\cdot(x-5)} < 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5) < 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов на $(0;\ 1)\cup(1;\ 5)\cup(5;\ 6)$

| Интервалы | $(0;1)$ | $(1;3)$ | $(3;5)$ | $(5;6)$ |
|---|---|---|---|---|
| Знак рационального выражения | − | + | − | + |

Таким образом, решениями второго неравенства является множество $(0;\ 1)\cup(3;\ 5)$.

Теперь решим первое неравенство системы:

$$7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x}\cdot\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2}+6 \Leftrightarrow 7^{x-\frac{1}{8}x^2} - 7\cdot 7^{-x+\frac{x^2}{8}} - 6 < 0 \Leftrightarrow 7^{x-\frac{1}{8}x^2} - \frac{7}{7^{x-\frac{x^2}{8}}} - 6 < 0.$$

Введем новую переменную. Пусть $7^{x-\frac{1}{8}x^2} = t, t > 0$. Тогда:

$$t - \frac{7}{t} - 6 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 7 \Leftrightarrow 0 < t < 7.$$

Перейдем к переменной $x$:

$$7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 4-\sqrt{16-8} \\ x > 4+\sqrt{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 4-2\sqrt{2} \\ x > 4+2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Решения второго неравенства системы: $\left(-\infty;\ 4-\sqrt{2}\right)\cup\left(4+\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

Пересечением решений обоих неравенств является множество $(0;\ 1)$.

Ответ: $(0;\ 1)$.