Задания

Задания Д7 C2 № 521679

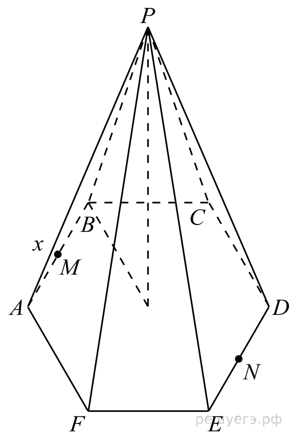
В правильной шестиугольной пирамиде $PABCDEF$ боковое ребро наклонено к основанию под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

а) Докажите, что плоскости APB и DPE перпендикулярны.

б) Найдите отношение радиуса сферы, касающейся всех граней пирамиды, к радиусу сферы, проходящей через все вершины пирамиды.

Решение.

а) Пусть M — середина AB, N — середина DE, H — основание высоты пирамиды. Пусть также $AB = x$, тогда $PH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $PB = \dfrac{\sqrt{7}}{2}x$, $PN = PM = \sqrt{PB^2 - BM^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}x$, $MN = AE = \sqrt{3}x$. Поскольку $PM^2 + PN^2 = MN^2$, треугольник MPN — прямоугольный. Значит, и плоскости содержащих их граней перпендикулярныы,поскольку грани пересекаются по некоторой прямой, проходящей через P и параллельной AB и DE, поэтому MP и NP перпендикулярны прямой пересечения этих плоскостей.



б) Радиус вписанной сферы равен радиусу вписанной окружности PMN, а радиус описанной сферы — радиусу описанной окружности PBE. Теперь вычислим.

$$\frac{r_{PMN}}{R_{PBE}} = \frac{S_{PMN}\cdot 4S_{PBE}}{p_{PMN}\cdot PB\cdot PE\cdot BE} = \frac{\frac{1}{2}MN\cdot PH\cdot 4\cdot \frac{1}{2}BE\cdot PH}{(PM+MH)\cdot PB^2\cdot BE} =$$

$$= \frac{MN\cdot PH^2}{(PM+MH)\cdot PB^2} = \frac{\sqrt{3}\cdot x\cdot x^2\cdot \frac{3}{4}}{x^2\cdot \frac{7}{4}\cdot (\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})x} = \frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{7(\sqrt{6}+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{6}{7(\sqrt{2}+1)} = \frac{6\sqrt{2}-6}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{6\sqrt{2}-6}{7}$.