

1. a_1, a_2, a_3, \dots – возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{a_k} = 3k$ для любого k . Найти:
- a_{100} ;
 - a_{1983} .
2. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006, но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более, чем на k . При каком наименьшем k такое возможно?
3. Дана бесконечная последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots (k \in \mathbb{N})$, в которой при каждом k член последовательности x_k является корнем уравнения $x^2 - 2 \cdot 3^k \cdot x + 9^k = 0$.
- Найдите наибольший порядковый номер k члена последовательности такой, что в десятичной записи числа x используется не более семи цифр.
 - Укажите наименьшее натуральное число N , среди делителей которого содержится ровно 8 членов данной последовательности.
 - Существует ли такое натуральное число n , что сумма n идущих подряд членов этой последовательности равна некоторому члену этой последовательности.
 - Существует ли набор из 2012 членов данной последовательности таких, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом.
4. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, \dots число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечётный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности
- число 1 встречается бесконечно много раз;
 - каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.
- (Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)
5. Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите:
- наименьшее такое число,
 - все такие числа.
6. Последовательность задана формулой $a_n = 5b + 3n$, где $n, b \in \mathbb{N}$.
- Может ли число 15 являться членом последовательности?
 - Верно ли, что данная последовательность является бесконечной арифметической прогрессией?
 - Может ли последовательность являться геометрической прогрессией?
 - Могут ли три подряд идущих члена последовательности являться сторонами прямоугольного треугольника?
7. Дан прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами.
- Могут ли стороны данного треугольника быть членами возрастающей геометрической прогрессии?
 - Докажите, что для любого натурального n можно найти такие три числа, которые будут являться сторонами этого треугольника и членами арифметической прогрессии с разностью n .
8. Несколько натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию, начиная с четного числа. Сумма нечетных членов прогрессии равна 33, четных — 44. Найдите эти числа.

9. Дана бесконечная последовательность чисел, в которой первый член равен 1, а каждый последующий в два раза меньше предыдущего.
- Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{7}$?
 - Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $\frac{1}{5}$?
10. Можно ли из последовательности $1, 1/2, 1/3, \dots$ выбрать (сохраняя порядок)
- сто чисел,
 - бесконечную последовательность чисел, из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$)?
11. В возрастающей арифметической прогрессии $\{a_n\}$ сумма цифр членов тоже образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Может ли в прогрессии $\{a_n\}$ быть:
- 11 членов;
 - бесконечное число членов?
12. В ряд выписаны в порядке возрастания числа, делящиеся на 9: 9, 18, 27, 36, Под каждым числом этого ряда записана сумма его цифр.
- На каком месте во втором ряду впервые встретится число 81?
 - Что встретится раньше: четыре раза подряд число 27 или один раз число 36?
13. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n > 3$).
- Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
 - Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 900?
 - Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 123.
14. Имеется арифметическая прогрессия, состоящая из пятидесяти чисел.
- Может ли эта прогрессия содержать ровно 6 целых чисел?
 - Может ли эта прогрессия содержать ровно 29 целых чисел?
 - Найдите наименьшее число n , при котором эта прогрессия не может содержать ровно n целых чисел.
15. Числовая последовательность задана формулой общего члена: $a_n < \frac{1}{n^2 + n}$.
- Найдите наименьшее значение n , при котором $a_n < \frac{1}{2017}$.
 - Найдите наименьшее значение n , при котором сумма n первых членов этой последовательности будет больше, чем 0,99.
 - Существуют ли в данной последовательности члены, которые образуют арифметическую прогрессию?
16. Даны $n(n \geq 3)$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.
- Может ли сумма всех данных чисел равняться 22?
 - Может ли сумма всех данных чисел равняться 23?
 - Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 48.

17. Бесконечная геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть

Пусть $S_1 = b_1$ и $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.

а) Приведите пример такой прогрессии, для которой среди чисел S_1, S_2, S_3, S_4 ровно два числа делятся на 24.

б) Существует ли такая прогрессия, для которой среди чисел S_1, S_2, S_3, S_4 ровно три числа делятся на 24.

в) Какое наибольшее количество чисел среди S_1, S_2, \dots, S_8 может делиться на 24, если известно, что S_1 на 24 не делится?

18. На доске написан упорядоченный набор из семи различных натуральных чисел. Среднее арифметическое первых четырех и среднее арифметическое последних четырех чисел равно 12.

а) Может ли среднее арифметическое всех чисел равняться 12?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел равняться 8?

в) Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать среднее арифметическое всех чисел.

19. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

20. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 2800, и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

21. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?

22. В последовательности натуральных чисел $a_1 = 47$, каждый следующий член равен произведению суммы цифр предыдущего члена и a_1 .

а) Найдите пятый член последовательности.

б) Найдите 50-й член последовательности.

в) Вычислите сумму первых пятидесяти членов этой последовательности.

23. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 24?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 24?

в) Для какого наибольшего натурального числа n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{3n} больше кратных 24, чем среди чисел $a_{3n+1}, a_{3n+2}, \dots, a_{7n}$, если известно, что разность прогрессии равна 1?

24. В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности:

- а) набор цифр 1234; 3269;
- б) вторично набор 1975;
- в) набор 8197?

25. Для членов последовательности целых чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} при всех натуральных $k \leq 8$ выполняется неравенство $a_k + a_{k+2} > 2a_{k+1}$.

- а) Может ли в такой последовательности выполняться равенство $a_{10} = 0$?
- б) Может ли в такой последовательности выполняться равенство $a_1 + a_{10} = 2a_7$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $a_1 - a_5 - a_6 + a_{10}$?

26. Известно, что все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ являются различными натуральными числами и что ее второй член в 8 раз больше первого.

- а) Может ли один из членов этой прогрессии быть больше другого ее члена в 567 раз?
- б) Найдите наименьшее возможное отношение двух членов этой прогрессии, отличных от a_1 , если известно, что отношение является целым числом, и укажите любую пару таких ее членов.
- в) Найдите третий член этой прогрессии, если известно, что один из ее членов равен 546.

27. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.

- а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?
- б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?

- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$?

28. Три двузначных натуральных числа x_1, x_2, x_3 образуют арифметическую прогрессию. При этом если в каждом из них поменять местами цифры десятков и единиц, то получатся числа y_1, y_2, y_3 , которые также образуют арифметическую прогрессию.

- а) Приведите пример такой прогрессии.
- б) Чему равна наибольшая разность такой прогрессии?
- в) Сколько существует таких прогрессий?