

1. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

2. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

3. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

4. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

6. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK и KE , если $\angle ECD = 15^\circ$.

7. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

8. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$ и $DN = 2CN$.

а) Докажите, что $AD = 4BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

9. В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

10. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O . Прямая DO пересекает сторону AB в точке M , а прямая CO пересекает сторону AD в точке K .

а) Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.

б) Найдите площадь треугольника AOM , если $BC = 10$ и $AD = 15$.

11. Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN . Высота BH пересекает эту окружность в точке K .

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите KN , если $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$, а радиус окружности равен 12.

12. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120^\circ$.

13. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P .

а) Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$.

б) Найдите угол $\angle APC$, если $DM = 1$ и $MC = 4$.

14. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ с центром в точке O вписана трапеция $ABCD$. Основание трапеции AD является диаметром окружности, угол BAD равен 60° . Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP : PD = 1 : 3$.

а) Докажите, что точка P — середина отрезка AO .

б) Найдите площадь треугольника BPE .

15. Данна трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружности, построенные на боковых сторонах KL и MN как на диаметрах, пересекаются в точках A и B .

а) Докажите, что средняя линия трапеции лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB .

б) Найдите AB , если известно, что боковые стороны трапеции равны 26 и 28, а средняя линия трапеции равна 15.

16. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC . Также известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 26$ и $BD = 24$.

17. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую BC в точке P . В каком отношении делит сторону AB (считая от точки B) прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AN : ND = 1 : 2$.

18. В параллелограмме $ABCD$ расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон AD , AB и BC , вторая — сторон AD , CD и BC .

а) Докажите, что общая внутренняя касательная l окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

б) Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а прямая l касается окружностей в точках M и N . Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках M , N и в центрах окружностей, если $AD = 16$, а расстояние между центрами окружностей равно 10.

19. Трапеция $ABCD$ с большим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K .

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N . Найдите AD , если радиус окружности равен 12, $\angle BAC = 30^\circ$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH .

20. Данна трапеция $ABCD$, где $AB = BC = CD$, точка E лежит на плоскости так, что $BE \perp AD$ и $CE \perp BD$.

а) Докажите, что углы AEB и BDA равны.

б) Найдите площадь трапеции, если $AB = 50$, а $\cos AEB = \frac{4}{5}$.

21. Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC .

а) Докажите, что AB — диаметр окружности, описанной около треугольника AOB .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника, вершины которого — точки касания окружности со сторонами трапеции, к площади самой трапеции $ABCD$, если известно, что $AB = CD$, а основания трапеции относятся как $1 : 2$.

22. На окружности ω отмечены точки M, N, K таким образом, что MN — диаметр, а K — середина дуги MN . Точка E — середина хорды MK . Точка B — середина дуги KN , не содержащей точку M . Через точку E проведена хорда AB .

а) Докажите, что $AE : BE = 1 : 3$.

б) В окружность ω вписан прямоугольник $ABCD$. Найдите его площадь, если $MN = 3\sqrt{7}$.

23. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R с центром в точке O , его диагонали AC и BD пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD пересекаются в точке Q .

а) Докажите, что $AQ \cdot DQ + BP \cdot DP = OQ^2 - OP^2$.

б) Найдите R , если $AB = 5$, $CD = 6$, $\angle AQB = 30^\circ$.

24. В равнобедренном тупоугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

25. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60^\circ$.

26. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям AD и BC . В эту трапецию вписали окружность с центром O . Прямая AO пересекает продолжение отрезка BC в точке E .

а) Докажите, что $AD = CE + CD$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AE = 10$, $\angle BAD = 60^\circ$.

27. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Отрезок AN пересекает окружность в точке K , а луч MK пересекает основание AD в точке L .

а) Докажите, что треугольник AKL подобен треугольнику MAL .

б) Найдите отношение $AL : LD$.

28. Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , K — точка касания окружности со стороной AB .

а) Докажите, что $AB \cdot \sqrt{AK \cdot BK} = AO \cdot BO$.

б) Найдите отношение меньшего основания трапеции к большему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

29. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D . Окружность с центром O , вписанная в треугольник ADB , касается отрезка AD в точке P , а прямая OP пересекает сторону AB в точке K .

- Докажите, что около четырёхугольника $BDOK$ можно описать окружность.
- Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $BDOK$, если $AB = 10$, $BC = \sqrt{19}$, $AC = 9$.

30. На окружности отмечены точки K, L, M, N , причем прямые KL и MN пересекаются вне круга в точке E , прямые LM и KN пересекаются вне круга в точке F . Биссектриса угла KEN пересекает отрезки LM и KN в точках P и R соответственно. Прямая, проведенная через точку F перпендикулярно прямой PR , пересекает отрезки KL и MN в точках S и Q соответственно.

- Докажите, что $PQRS$ — ромб.
- Найдите площадь четырехугольника $PQRS$, если известно, что $EL = 4$, $EM = 6$, $LM = 5$ и $KN = 15$.

31. Окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, касаются между собой.

- Докажите, что в трапецию можно вписать окружность.
- Найдите основания этой трапеции, если её боковые стороны равны 3 и 8, а большая сторона основания видна из центра вписанной окружности под углом 120° .

32. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

- Докажите, что $AD = 3BC$.
- Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

33. В четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O .

- Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.
- Найдите радиус вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, если $AC = 12$ и $BD = 13$.

34. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD отмечена точка N так, что в четырехугольник $BCDN$ можно вписать окружность. Известно, что $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$, $\frac{DN}{AN} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

- Докажите, что высоты параллелограмма, опущенные из вершины C , делят угол BCD на три равные части.
- Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $BCDN$, если $AC = 2$.

35. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, а углы ABC и ADC — прямые.

- Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC , касаются в точке пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.
- Найдите AC , если периметр треугольника ADC равен 44, а расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и DBC , равно 6.

36. В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

- Докажите, что точка A лежит на прямой LO .
- Найдите длину стороны MN , если $LA = 1$.