

1. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1.
  - а) Докажите, что  $BD_1 \perp AC$ .
  - б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $BD_1$ .
  
2. Дана правильная треугольная пирамида  $DABC$  с вершиной  $D$ . Боковое ребро пирамиды равно  $\sqrt{43}$ , высота равна  $\sqrt{31}$ .
  - а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середины ребер  $BD$ ,  $AC$  и  $AD$ , является прямоугольником.
  - б) Найдите расстояние от середины бокового ребра  $BD$  до прямой  $MT$ , где точки  $M$  и  $T$  — середины ребер  $AC$  и  $AD$  соответственно.
  
3. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 1.
  - а) Докажите, что точки  $D_1$ ,  $E$  и  $F_1$  лежат на сфере с центром в точке  $B$ .
  - б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $F_1 E_1$ .
  
4. Дана правильная треугольной призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ 
  - а) Докажите, что плоскость  $\alpha$ , проходящая через прямую  $AB_1$  и центр грани  $ACC_1 A_1$ , делит объем призмы в отношении  $2 : 1$ .
  - б) Пусть высота призмы равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC_1$ .
  
5. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  высота равна 1, а ребро основания равно 2.
  - а) Докажите, что объем пирамиды  $A_1 BCC_1 B_1$  вдвое больше объема пирамиды  $ACBC_1$ .
  - б) Найдите расстояние от точки  $A_1$  до прямой  $BC_1$ .
  
6. Длины ребер  $AB$ ,  $AA_1$  и  $AD$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равны соответственно 12, 16 и 15.
  - а) Докажите, что объем пирамиды  $A_1 BDC_1$  втрое меньше объема параллелепипеда.
  - б) Найдите расстояние от вершины  $A_1$  до прямой  $BD_1$ .
  
7. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $2\sqrt{2}$ . Точки  $M$  и  $T$  — середины ребер  $AD$  и  $A_1 B_1$  соответственно.
  - а) Докажите, что  $A_1 C_1 \perp MT$ .
  - б) Найдите расстояние от середины ребра  $B_1 C_1$  до прямой  $MT$ .
  
8. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2.
  - а) Докажите, что прямые  $SE$  и  $AC$  перпендикулярны.
  - б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $SA$ .
  
9. В тетраэдре  $ABCD$ , все рёбра которого равны 1, отметили середину ребра  $CD$  — точку  $E$ .
  - а) Докажите, что плоскость  $ABE$  перпендикулярна ребру  $CD$ .
  - б) Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BE$ .
  
10. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ , сторона основания равна 1, а боковое ребро равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
  - а) Докажите, что прямые  $AS$  и  $BD$  перпендикулярны.
  - б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $SA$ .
  
11. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  высота равна 2, сторона основания равна 1.
  - а) Докажите, что точки  $A_1$  и  $B$  равноудалены от плоскости  $AB_1 C_1$ .
  - б) Найдите расстояние от точки  $B_1$  до прямой  $AC_1$ .

12. В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ , у которого угол  $C$  равен  $90^\circ$ , угол  $A$  равен  $30^\circ$ ,  $AC = 10\sqrt{3}$ . Диагональ боковой грани  $B_1C$  составляет угол  $30^\circ$  с плоскостью  $AA_1B_1$ .

- а)  $CE$  — высота треугольника  $ABC$ . Докажите, что угол  $B_1EC$  прямой.
- б) Найдите высоту призмы.

13. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$ , все рёбра которой равны 4, точка  $N$  — середина ребра  $AC$ , точка  $O$  — центр основания пирамиды, точка  $P$  делит отрезок  $SO$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины пирамиды.

- а) Докажите, что прямая  $NP$  перпендикулярна прямой  $BS$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $NP$ .

14. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Длина ребра куба равна 1.

- а) Докажите, что расстояние от середины отрезка  $BC_1$  до плоскости  $AB_1D_1$  равно расстоянию середины отрезка  $BC_1$  до прямой, проходящей через середину отрезка  $AD_1$  и вершину  $B_1$ .
- б) Найдите это расстояние.

15. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $MABCD$ , рёбра основания которой равны  $5\sqrt{2}$ . Тангенс угла между прямыми  $DM$  и  $AL$  равен  $\sqrt{2}$ ,  $L$  — середина ребра  $MB$ .

- а) Докажите, что плоскости  $ACL$  и  $MDB$  перпендикулярны.
- б) Найдите высоту данной пирамиды.

16. Длины ребер  $AB$ ,  $AA_1$  и  $AD$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равны соответственно 12, 16 и 15.

- а) Докажите, что расстояние от вершины  $D_1$  до прямой  $A_1B$  больше, чем расстояние от вершины  $A_1$  до прямой  $BD_1$ .
- б) Найдите расстояние от вершины  $A_1$  до прямой  $BD_1$ .

17. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 4.

- а) Докажите, что плоскости  $CD_1E_1$  и  $AEE_1$  перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $D_1E_1$ .

18. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все ребра равны 1.

- а) Докажите, что прямая  $BF_1$  перпендикулярна прямой  $F_1E_1$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $E_1F_1$ .

19. Дана правильная треугольная пирамида  $DABC$  с вершиной  $D$ . Сторона основания пирамиды равна  $\sqrt{6}$ , высота равна  $\sqrt{30}$ .

- а) Докажите, что сечение, проходящее через середину бокового ребра  $BD$  и точки  $M$  и  $T$  (середины ребер  $AC$  и  $AB$  соответственно), является прямоугольником.
- б) Найдите расстояние от середины бокового ребра  $BD$  до прямой  $MT$ .

20. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Ребро основания пирамиды равно  $\sqrt{6}$ , высота —  $\sqrt{33}$ .

- а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середину ребра  $AD$  и точки  $M$  и  $T$  — середины ребер  $CS$  и  $BC$  соответственно, является равнобедренной трапецией.
- б) Найдите расстояние от середины ребра  $AD$  до прямой  $MT$ .

21. Основанием прямого параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$ , сторона которого равна  $4\sqrt{3}$ , а угол  $BAD$  равен  $60^\circ$ .

- а) Докажите, что прямые  $AC_1$  и  $BD$  перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $C_1D_1$ , если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

**22.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Прямые  $CA_1$  и  $AB_1$  перпендикулярны.

а) Докажите, что  $AA_1 = AC$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ , если  $AC = 6$ ,  $BC = 3$ .

**23.** Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $AD$  и  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  соответственно.

а) Докажите, что прямая  $BQ$  перпендикулярна прямой  $B_1P$ .

б) Пусть  $H$  — проекция точки  $Q$  на прямую  $B_1P$ . Найдите  $PH$ , если  $AB = 12$ .

**24.** В прямом круговом цилиндре проведена образующая  $NN_1$ , точка  $N$  лежит в нижнем основании. Отрезок  $KM_1$  пересекает ось цилиндра, а точки  $K$  и  $M_1$  лежат на окружностях нижнего и верхнего основания соответственно.

а) Докажите, что треугольник  $KNM_1$  прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки  $N$  до прямой  $KM_1$ , если  $KN = 9$ ,  $NN_1 = 20\sqrt{3}$ ,  $N_1M_1 = 20$ .

**25.** Точка  $O$  — центр основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ . Точки  $K, L, M, T$  — середины отрезков  $AF, SF, SD, MK$  соответственно.

а) Докажите, что точка  $T$  лежит на отрезке  $LO$ .

б) Найдите  $CT$ , если сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды равна 48.

**26.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром, равным 6, на ребре  $AA_1$  взята точка  $M$  так, что  $\frac{AM}{MA_1} = \frac{1}{2}$ .

На ребре  $D_1C_1$  взята точка  $N$  так, что  $\frac{D_1N}{NC_1} = \frac{1}{2}$ .

а) Докажите, что прямые  $MB_1$  и  $CN$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $CN$ .

**27.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $P, K, L$  — середины рёбер  $AA_1, A_1D_1, B_1C_1$  соответственно, точка  $Q$  — центр грани  $CC_1D_1D$ . Отрезок  $MN$  с концами на прямых  $AD$  и  $KL$  соответственно пересекает прямую  $PQ$  и перпендикулярен ей.

а) Докажите, что  $AM : MD = 5 : 1$ .

б) Найдите длину отрезка  $MN$ , если сторона куба равна 3.