

- 1.** В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 4. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  построена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .
- Докажите, что  $A_1P : PB_1 = 2 : 1$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
  - Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1C_1C$ .
- 2.** Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABC A_1B_1C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.
- Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.
  - Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .
- 3.** В основании прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка  $E$  лежит на диагонали  $BD_1$ , причём  $BE = 1$ .
- Постройте сечение призмы плоскостью  $A_1C_1E$ .
  - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .
- 4.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точка  $M$  — середина ребра  $SA$ , точка  $K$  — середина ребра  $SB$ . Кроме того известно, что  $SC = 6$ ,  $BC = 4$ .
- Докажите, что  $BMC$  — равнобедренный, остроугольный треугольник.
  - Найдите угол между плоскостями  $CMK$  и  $ABC$ .
- 5.** Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно  $2\sqrt{197}$ .
- Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.
  - Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.
- 6.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  точка  $M$  — середина ребра  $SA$ , точка  $K$  — середина ребра  $SC$ .
- Докажите, что прямые  $SB$  и  $MK$  перпендикулярны.
  - Найдите угол между плоскостями  $BMK$  и  $ABC$ , если  $AB = 8$ ,  $SC = 6$ .
- 7.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E : EA = 3 : 4$ . Точка  $T$  — середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 9$ ,  $AD = 6$ ,  $AA_1 = 14$ .
- В каком отношении плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$ ?
  - Найдите угол между плоскостью  $ETD_1$  и плоскостью  $AA_1B_1$ .
- 8.** Данна правильная треугольная призма  $ABC A_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 4. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
  - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .
- 9.** Данна правильная треугольная призма  $ABC A_1B_1C_1$ , у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
  - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .
- 10.** В параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $F$  середина ребра  $AB$ , а точка  $E$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DE : ED_1 = 6 : 1$ . Через точки  $F$  и  $E$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая диагональ  $B_1D$  в точке  $O$ .
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $DB_1$  в отношении  $DO : OB_1 = 2 : 3$ .
  - Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $(ABC)$ , если дополнительно известно, что  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

**11.** Основание прямой четырехугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = 12$ ,  $AD = 5$ .

а) Докажите, что расстояние между прямыми  $AC$  и  $B_1D_1$  равно расстоянию между прямыми  $A_1D_1$  и  $BD$ .

б) Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра  $AD$  перпендикулярно прямой  $BD_1$ , если расстояние между прямыми  $AC$  и  $B_1D_1$  равно 13.

**12.** Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  плоскостью  $\alpha$  содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

а) Докажите, что грань  $ABCD$  — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 6$ ,  $AB = 4$ .

**13.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра  $SA$  за точку  $A$  отмечена точка  $P$ , а на продолжении ребра  $SB$  за точку  $B$  — точка  $Q$ , причём  $AP = BQ = SA$ .

а) Докажите, что прямые  $PQ$  и  $SC$  перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CPQ$ .

**14.** Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Точка  $K$  — середина ребра  $C_1D_1$ .

а) Докажите, что расстояние от вершины  $A_1$  до прямой  $BK$  равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями  $KBA_1$  и  $BCC_1$ .

**15.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 1 : 2$ .

а) Докажите, что точки  $A$  и  $C_1$  равноудалены от плоскости  $BED_1$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

**16.** Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCDA_1B_1C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ .

а) Докажите, что объём пирамиды  $A_1BCC_1B_1$  вдвое больше объёма пирамиды  $AA_1BC$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $A_1BC$  и плоскостью основания призмы.

**17.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  все ребра равны 1.

а) Докажите, что прямые  $SB$  и  $SD$  перпендикулярны.

б) Найдите синус угла между плоскостью  $SAD$  и плоскостью, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно прямой  $BD$ .

**18.** Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник  $ABC$  с боковой стороной 10 и  $\angle A = 120^\circ$  расположен так, что его вершина  $A$  лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины  $B$  и  $C$  — на окружности верхнего основания.

а) Найдите угол между плоскостью  $ABC$  и плоскостью основания цилиндра.

б) Докажите, что радиус основания цилиндра больше, чем  $AB$ .

**19.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с вершиной  $M$  сторона основания  $AB$  равна 6. На ребре  $AB$  отмечена точка  $K$  так, что  $AK : KB = 5 : 1$ .

а) Докажите, что объём пирамиды делится плоскостью  $MKC$  в отношении 5 : 1.

б) Сечение  $MKC$  является равнобедренным треугольником с основанием  $MK$ . Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

**20.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $CD$  и  $SC$  отмечены точки  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KN$  и параллельна прямой  $BC$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

- 21.** В треугольной пирамиде  $SABC$  точка  $E$  — середина ребра  $SA$ , точка  $F$  — середина ребра  $SB$ ,  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .
- Докажите, что плоскость  $CEF$  делит отрезок  $SO$  в отношении  $3 : 2$ , считая от вершины  $S$ .
  - Найдите косинус угла между плоскостями  $CEF$  и  $EFT$ , если точка  $T$  — середина  $SC$ , пирамида  $SABC$  правильная, площадь треугольника  $ABC$  равна  $27\sqrt{3}$ , а  $SB = 10$ .
- 22.** Данна правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $AC$ , проходит через точку  $B$  и середину высоты пирамиды.
- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $SD$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $D$ .
  - Найдите синус угла между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ASC$ , если угол  $SAC$  равен  $30^\circ$ .
- 23.** Точка  $O$  — центр грани  $ABCD$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . На рёбрах  $AD$  и  $C_1D_1$  отмечены соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $DM = D_1N = AO$ .
- Докажите, что прямая  $MN$  образует с плоскостью  $DCC_1$  угол  $30^\circ$ .
  - Найдите угол между плоскостями  $MNO$  и  $DCC_1$ .
- 24.** Плоскость  $\alpha$  проходит через середину ребра  $AD$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  перпендикулярно прямой  $BD_1$ .
- Докажите, что угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$  равен углу между прямыми  $BB_1$  и  $B_1D$ .
  - Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$ , если объём параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  равен  $48\sqrt{3}$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$  и  $AD = 6$ .
- 25.** Данна правильная треугольная призма  $ABC A_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 6. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.
- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
  - Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ACC_1$ .
- 26.** В правильной треугольной призме  $ABC A_1B_1C_1$  стороны основания равны 5, боковые ребра равны 15, точка  $D$  — середина ребра  $CC_1$ .
- Пусть прямые  $BD$  и  $B_1C_1$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что угол  $EA_1B_1$  — прямой.
  - Найдите угол между плоскостями  $A_1B_1C_1$  и  $BDA_1$ .
- 27.** В правильной треугольной призме  $ABC A_1B_1C_1$  сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. На рёбрах  $AA_1$  и  $A_1C_1$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = A_1N = 2$ .
- Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.
  - Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ACC_1$ .
- 28.** В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  со стороной 8 на ребре  $AA_1$  взята точка  $K$  такая, что  $A_1K = 1$ . Через точки  $K$  и  $B_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC_1$ .
- Докажите, что  $A_1P : PD_1 = 1 : 6$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  и ребра  $A_1D_1$ .
  - Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ADD_1$ .
- 29.** Данна правильная треугольная пирамида  $SABC$ ,  $AB = 24$ , высота  $SH$ , проведённая к основанию, равна 14, точка  $K$  — середина  $AS$ , точка  $N$  — середина  $BC$ . Плоскость, проходящая через точку  $K$  и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра  $SB$  и  $SC$  в точках  $Q$  и  $P$  соответственно.
- Докажите, что  $PQ$  проходит через середину отрезка  $SN$ .
  - Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью  $APQ$ .
- 30.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с основанием  $ABC$  стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 5. На ребре  $AC$  находится точка  $D$ , на ребре  $AB$  находится точка  $E$ , а на ребре  $AM$  — точка  $L$ . Известно, что  $AD = AE = AL = 4$ .
- Докажите, что отрезок  $DE$  содержит центр основания пирамиды.
  - Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $D$  и  $L$ .

**31.** В правильной четырехугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  стороны основания равны 4, боковые ребра равны 6. Точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$ , на ребре  $BB_1$  отмечена точка  $N$ , такая, что  $BN : NB_1 = 1 : 2$ .

- Докажите, что плоскость  $AMN$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $1 : 5$ , считая от точки  $D$ .
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $AMN$ .

**32.** Основанием прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является ромб с тупым углом  $B$ , равным  $120^\circ$ . Все ребра этой призмы равны 10. Точки  $P$  и  $K$  — середины ребер  $CC_1$  и  $CD$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $PK$  и  $PB_1$  взаимно перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $PKB_1$  и  $C_1B_1B$ .

**33.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  точка  $K$  является серединой ребра  $SD$ , а точка  $L$  — серединой стороны  $BC$  основания  $ABCD$ . Плоскость  $AKL$  пересекает ребро  $SC$  в точке  $N$ .

- Докажите, что  $SN : NC = 2 : 1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $AKL$  и  $ABC$ , если  $AB = 10$ , а высота пирамиды равна 20.

**34.** Трапеция  $KLMN$  является основанием пирамиды  $PKLMN$ ,  $\angle KLM + \angle LMN = 270^\circ$ ,  $Q$  — точка пересечения прямых  $KL$  и  $MN$ . Плоскости  $KPL$  и  $PMN$  перпендикулярны плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскости  $KPL$  и  $PMN$  взаимно перпендикулярны.
- Найдите площадь полной поверхности пирамиды  $PLQM$ , если  $KL = LM = MN = 12$ , а высота пирамиды  $PKLMN$  равна 8.

**35.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  все ребра равны. Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $SA$  и  $SC$  соответственно.

- В каком отношении плоскость  $BMN$  делит высоту  $SH$  пирамиды?
- Найдите угол между плоскостью  $BMN$  и основанием пирамиды, если ребра пирамиды равны 12.

**36.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $K$  и  $M$  соответственно, причём  $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна прямой  $BC$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

**37.** Данна прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями  $AD = 5$  и  $BC = 4$ . Точка  $M$  делит ребро  $A_1D_1$  в отношении  $A_1M : MD_1 = 1 : 4$ , точка  $K$  — середина ребра  $DD_1$ .

- Доказать, что плоскость  $MCK$  параллельна прямой  $BD$ .
- Найти тангенс угла между плоскостью  $MKC$  и плоскостью основания, если  $\angle BAD = 60^\circ$ , а  $\angle CKM = 90^\circ$ .

**38.** В правильной четырехугольной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точки  $M, N, K$  делят ребра  $AA_1, BB_1, DD_1$  в отношении  $1 : 4, 1 : 5, 1 : 3$ , считая от нижнего основания  $ABCD$ .

- Докажите, что плоскость  $MNK$  делит ребро  $CC_1$  в отношении  $13 : 47$ , считая от нижнего основания.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания равна  $\sqrt{13}$ , а высота равна 60.

**39.** В правильной треугольной призме  $ABC A_1B_1C_1$  ребра основания равны 4, а боковые рёбра равны 5. Точка  $K$  — середина ребра  $B_1C_1$ , точка  $P$  лежит на ребре  $CC_1$  так, что  $C_1P : PC = 1 : 4$ .

- Докажите, что прямые  $AP$  и  $PK$  перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $APK$  и  $CAA_1$ .

**40.** В правильной треугольной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$  сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Через точку пересечения диагоналей грани  $AA_1 B_1 B$  и середину ребра  $CC_1$  проходит плоскость  $\alpha$  под углом  $45^\circ$  к плоскости основания призмы, *пересекающая сторону  $BC$* .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середину  $M$  ребра  $BC$ .
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $AB_1 M$ .

**41.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABC A_1 B_1 C_1 D_1$  на ребрах  $AB$ ,  $A_1 B_1$  и  $B_1 C_1$  отмечены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно так, что  $KLMC$  — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

- Докажите, что точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $KLM$  и  $ABC$ , если площадь трапеции  $KLMC$  равна 6.

**42.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABC A_1 B_1 C_1 D_1$  на ребрах  $AB$ ,  $A_1 B_1$  и  $B_1 C_1$  отмечены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно так, что  $KLMC$  — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 8.

- Докажите, что точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $KLM$  и  $ABC$ , если площадь трапеции  $KLMC$  равна  $12\sqrt{2}$ .

**43.** Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $BC$  соответственно куба  $ABC A_1 B_1 C_1 D_1$ . Прямые  $CM$  и  $DN$  пересекаются в точке  $O$ . Через центры граней  $ABB_1 A_1$  и  $BCC_1 B_1$  и точку  $O$  проходит плоскость  $\alpha$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AB$  куба в отношении  $1 : 4$ , считая от точки  $A$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$ .

**44.** Основанием пирамиды с вершиной  $S$  является равнобедренная трапеция  $ABCD$ , в которой  $AD = 2BC$ . Сечение пирамиды  $SABCD$  проходит через точку  $B$  и является прямоугольником. Известно, что это сечение делит высоту пирамиды в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $S$ .

- Докажите, что высота пирамиды  $SABCD$  проходит через середину высоты основания  $ABCD$ .
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью боковой грани  $SAB$ , если плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом  $15^\circ$ , а одна из сторон сечения равна большему основанию трапеции  $ABCD$ .

**45.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  на ребрах  $AB$ ,  $BC$  и  $SC$  отмечены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Известно, что  $AK : KB = BL : LC = 2 : 1$ ,  $SM : MC = 7 : 1$ .

- Докажите, что плоскость  $KLM$  проходит через середину ребра  $SD$ .
- Найдите угол между плоскостью  $KLM$  и плоскостью основания пирамиды, если высота пирамиды равна диагонали основания.

**46.** В основании пирамиды  $SABCD$  с равными боковыми ребрами лежит прямоугольник  $ABCD$ . Через точку пересечения медиан грани  $SBC$  и вершину  $A$  проходит плоскость  $\alpha$ , параллельная ребру  $SD$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $C$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $SBC$ , если  $BC : SB : AB = 1 : 2 : \sqrt{3}$ .

**47.** Основанием прямой призмы  $ABC A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$  с острым углом  $A$ , равным  $60^\circ$ , а боковое ребро равно стороне основания. Через середины ребер  $A_1 D_1$ ,  $D_1 C_1$  и точку  $B$  проведена плоскость  $\alpha$ .

- Найдите отношение площади сечения призмы  $ABC A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $\alpha$  к площади основания призмы.
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $DCC_1$ .

**48.** У правильной шестиугольной пирамиды  $ABCDEF S$  с вершиной  $S$  боковые ребра вдвое длиннее стороны основания. Точка  $N$  делит диагональ основания  $AD$  в отношении  $AN : ND = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  приходит через точки  $E$  и  $N$  параллельно медиане боковой грани  $SCD$ , проведенной из точки  $C$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит площадь боковой грани  $ASF$  в отношении  $25 : 17$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$ .

**49.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E : EA = 3 : 1$ , а на ребре  $BB_1$  — точка  $F$  так, что  $B_1F : FB = 3 : 5$ . Известно, что  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 16$ .

- Докажите, что плоскость  $EFD_1$  делит ребро  $B_1C_1$  на два равных отрезка.
- Найдите угол между плоскостью  $EFD_1$  и плоскостью  $AA_1B_1$ .

**50.** В правильной четырехугольной призме  $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$  точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  делят ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $DD_1$  в отношении  $1 : 5$ ,  $1 : 4$  и  $1 : 2$  соответственно, считая от нижнего основания  $ABCD$ .

- Докажите, что плоскость  $MNK$  делит ребро  $CC_1$  в отношении  $11 : 19$ , считая от нижнего основания.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания призмы равна  $\sqrt{13}$ , а высота равна 30.

**51.** Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  параллельно основанию проведено сечение  $A_1B_1C_1D_1$ , диагонали которого пересекаются в точке  $O_1$ . На ребрах  $AD$  и  $SB$  отмечены точки  $K$  и  $M$  соответственно так, что  $AK : KD = 3 : 5$ ,  $SM : MB = 3 : 1$ .

- Докажите, что плоскость  $KMO_1$  параллельна  $SA$ .
- Найдите угол между плоскостью  $KMO_1$  и плоскостью  $ABC$ , если боковые ребра пирамиды  $SABCD$  наклонены к плоскости основания под углом  $60^\circ$ .

**52.** Данна правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$  с основанием  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через ребро  $AB$  и пересекает ребра  $SC$  и  $SD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Известно, что  $AB = AN = BM = 5MN$ .

- Докажите, что  $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$ .
- Найдите косинус угла между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания пирамиды.

**53.** Данна правильная призма  $ABC A_1B_1C_1$ . Точка  $K$  лежит на ребре  $AB$  и делит его в отношении  $AK : KB = 3 : 1$ . Точка  $L$  — середина ребра  $BC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $K$  и  $L$  и пересекает ребра  $B_1C_1$  и  $A_1B_1$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Известно, что  $B_1M : MC_1 = 3 : 1$ .

- Докажите, что  $MN \perp AB$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

**54.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E : EA = 5 : 2$ . Точка  $T$  — середина ребра  $B_1C_1$ .

- Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью  $ETD_1$  является трапецией.
- Найдите угол между плоскостью  $ETD_1$  и плоскостью  $A_1B_1C_1$ , если известно, что  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 14$ .