

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

- а) Докажите, что плоскость $BA_1 C_1$ и прямая $B_1 D$ перпендикулярны.
- б) Найдите косинус угла между плоскостями $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$.

2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что прямые $B_1 D$ и AC перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 D_1$ и ACD_1 .

3. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

- а) Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен $\arccos \frac{7}{25}$.
- б) Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

4. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

- а) Докажите, что высота пирамиды, проведенная к боковой грани, больше чем высота пирамиды, проведенная к основанию.
- б) Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

- а) Докажите, что плоскости $AB_1 D_1$ и $A_1 BC$ перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 D_1$ и ACD_1 .

6. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что плоскости $A_1 BD$ и $B_1 CD_1$ параллельны.
- б) Пусть дополнительно известно, что параллелепипед прямоугольный, кроме того $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$. Найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

- а) Докажите, что высоты треугольников ABD и $A_1 BD$, проведённые к стороне BD , имеют общее основание.
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка D — середина ребра BB_1 .

- а) Пусть прямые $C_1 D$ и BC пересекаются в точке E . Докажите, что угол EAC — прямой.
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADC_1 .

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

- а) Докажите, что плоскости $AA_1 D_1$ и $DB_1 F_1$ перпендикулярны.
- б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

10. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1 .
- б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

11. Дана прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основание призмы — ромб с острым углом $A = 60^\circ$.

- а) Докажите, что $AD_1 = DB_1$.
- б) Найдите угол между плоскостью $AC_1 B$ и плоскостью ABD , если высота призмы равна 5, а ребро основания равно 4.

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

- а) Найдите длину отрезка $A_1 K$, где K — середина ребра BC .
- б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и $BB_1 C_1$.

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

- а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра $B_1 C_1$.
- б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и $BB_1 C_1$.

14. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проецируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

- а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
- б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро SD равно 8.

15. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1 .

- а) Докажите, что плоскость ADB_1 делит объем призмы пополам.
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 .

16. Дана прямая призма $ABCA_1 B_1 C_1$.

- а) Докажите, что линия пересечения плоскостей ABC_1 и $A_1 B_1 C$ параллельна основаниям призмы.
- б) Найдите угол между плоскостями ABC_1 и $A_1 B_1 C$, если известно, что $AC = 1$, $BC = 2$, $AB = \sqrt{5}$, $CC_1 = 3$.

17. Дана правильная треугольная пирамида.

- а) Докажите, что её противоположные ребра перпендикулярны.
- б) Пусть известно, что косинус угла между боковой гранью и основанием равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

18. Дана правильная треугольная пирамида.

- а) Докажите, что её противоположные ребра перпендикулярны.
- б) Пусть косинус угла между боковой гранью и основанием равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

19. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- а) Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.
- б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB , если $SB = BC$.

20. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- а) Докажите, что P — середина BQ .
- б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если $SD = 9$.

21. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB .

- а) Докажите, что $SA = SC$.
- б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC , если $AB = 30$, $SC = 17$, $CB = 24$.

22. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

- а) Докажите, что плоскости ACA_1 и $B_1 CE_1$ перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями $B_1 CE_1$ и ABC .

23. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$. Высота пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Из вершин A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

- а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
- б) Найдите угол между гранями SBA и SBC , если ребро $SD = 4$.

24. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$ с прямоугольником $ABCD$ в основании, $AB = 6$ и $BC = 6\sqrt{2}$. Высота пирамиды проецируется в точку пересечения диагоналей основания. Из вершин A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ .

- а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .
- б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если ребро $SD = 12$.