

1. Окружность с центром O , расположенном внутри прямоугольной трапеции $ABCD$, проходит через вершины B и C большей боковой стороны этой трапеции и касается боковой стороны AD в точке T .
 - а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC .
 - б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC , если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.
2. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .
 - а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
 - б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.
3. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .
 - а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
 - б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .
4. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .
 - а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
 - б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.
5. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.
 - а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.
 - б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.
6. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.
 - а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.
 - б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.
7. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .
 - а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
 - б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD .
8. Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3 : 4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.
 - а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.
 - б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.
9. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точке S и M .
 - а) Докажите, что угол BAM равен углу CAD .
 - б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O .
Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

10. Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

- Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
- Найдите O_1O_2 .

11. Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$ и пересекает BC и CD в точках E и K соответственно.

- Докажите, что отрезки AE и AK равны.
- Найдите AD , если $CE = 48$, $DK = 20$, $\cos \angle BAD = 0,4$.

12. Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

- Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной и той же точке.
- Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 11$, $KL = 10$, $LB = 4$.

13. Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D .

- Докажите, что $AE = AK$.
- Найдите AD , если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos \angle BAD = 0,2$.

14. Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма и пересекает продолжение стороны AD в точке E , а продолжение стороны CD в точке K .

- Докажите, что отрезки BE и BK равны.
- Найдите отношение KE к AC , если $\angle ABC = 135^\circ$.

15. Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Около треугольника KLN описана окружность, прямые LM и MN — касательные к этой окружности.

- Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
- Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

16. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

- Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите длину отрезка QN , если $BC = 4,5$, $AD = 21,5$, $AB = 26$, $CD = 25$, а угол CPD — прямой.

17. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Окружность проходит через точки B и C и пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q , отличных от концов отрезка, соответственно.

- Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите PM , если отрезки AQ и BQ перпендикулярны, $AB = 15$, $BC = 1$, $CD = 17$, $AD = 9$.

18. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

- Докажите, что $OP = AP$.
- Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

19. В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O .

- Докажите, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.
- Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 10$, $BD = 26$.

20. В прямоугольнике $ABCD$, в котором $AD = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, а $AB = 6$, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K , радиус которой равен 2, касается сторон AB и AD . Окружность с центром в точке L , радиус которой равен 1, касается стороны CD и первой окружности.

- Докажите, что точки A, K, L лежат на одной прямой.
- Найдите площадь треугольника CLM , если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L .

21. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK , проведенной из вершины C к этой окружности, равна 2.

- Докажите, что длина отрезка, соединяющего центр квадрата и центр окружности равна длине отрезка CK .
- Найдите диаметр окружности.

22. В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол BCD — тупой. Через точку B проведена прямая, параллельная прямой CD и пересекающая прямую AD в точке E . На продолжении BE за точку E отмечена точка F такая, что $DE = DF$.

- Докажите, что точки A, F, C и D лежат на одной окружности.
- Найдите расстояние от точки C до прямой AF , если $BD = 10$ и $\cos \angle ADC = 0,6$.

23. В четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O .

- Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.
- Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, если $AC = 10$ и $BD = 26$.

24. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AB как на диаметре построена окружность S центром O . Отрезок OD пересекает окружность в точке M . Известно, что $\frac{DM}{AB} = \frac{\sqrt{26} - 1}{2}$.

- Докажите, что стороны прямоугольника относятся как $5 : 2$.

- Найдите MC , если известно, что $AM = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{26}}}$.

25. В окружности с центром O построен квадрат $KOFD$ так, что его вершина D лежит на окружности. Из точки B , диаметрально противоположной точке D , проведены две хорды AB и BC , проходящие через вершины K и F квадрата соответственно.

- Докажите, что $AK : KB = 1 : 5$.
- Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если радиус окружности равен 5.

26. Диагональ трапеции делит ее на два подобных прямоугольных треугольника, в каждый из которых вписана окружность.

- Докажите, что произведение оснований трапеции равно квадрату этой диагонали.
- Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в эти треугольники, если основания трапеции равны 9 и 25.

27. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке L , а окружность с диаметром AC пересекает основание AD в точке K . Отрезки AL и CK пересекаются в точке M .

- Докажите, что точка M лежит на диагонали BD трапеции $ABCD$.
- Найдите расстояние от точки M до боковой стороны AB , если $BC = 4$, $AD = 28$.

28. Два квадрата $ABCD$ и $AMNK$ с периметрами соответственно 20 и 24 располагают в круге так, что точки C, D, M, N лежат на окружности, A — общая, B и K внутри круга, угол BAK — острый.

- Докажите, что угол BAK равен $\frac{\pi}{4}$.
- Найдите площадь круга.

29. Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$ и касается его сторон AB и AD в точках K и P соответственно. К хорде KP проведен перпендикуляр CH .

- а) Докажите, что треугольники CBK и CHP подобны.
- б) Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $CH = 7$.

30. В прямоугольной трапеции $ABCD$ к большей боковой стороне BC построен перпендикуляр, пересекающий BC и AD в точках F и N соответственно. Окружность, описанная около треугольника ABN проходит через T — точку пересечения DF и NC , а окружность, описанная около треугольника DNC проходит через P — точку пересечения AT и BN . Угол NAT равен 18° .

- а) Докажите, что PF параллельна AB .
- б) Найдите PT , если $AB = \sqrt{5} + 1$.

31. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD ($BC < AD$) окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , делят диагональ AC в отношении $2 : 1 : 1$, считая от точки A .

- а) Докажите, что одно из оснований трапеции равно боковой стороне.
- б) Найдите отношение, в котором диагональ AC делит площадь трапеции.

32. Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K .

- а) Докажите, что $AE = AK$.
- б) Найдите отношение $KE : BD$, если $\angle BAD = 60^\circ$.

33. В прямоугольнике $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 2 : 1$, DK пересекает AC в точке P . На стороне AD отмечена точка T так, что PT касается окружности, вписанной в треугольник ACD , а около четырехугольника $PCDT$ можно описать окружность.

- а) Докажите, что $AT : TD = 5 : 3$
- б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $PCDT$, если $AB = 3$.

34. Окружность проходит через вершины C и D ромба $ABCD$ и касается стороны AB , а также пересекает стороны AD и BC в точках M и N соответственно, причем $BN : CN = 4 : 5$.

- а) Докажите, что $AM : MD = 1 : 8$.
- б) Найдите CM , если сторона ромба равна 9.

35. Окружность с центром O , расположенном внутри прямоугольной трапеции $ABCD$, проходит через вершины B и C большей боковой стороны этой трапеции и касается боковой стороны AD в точке K . При этом отрезок AB пересекает окружность в точке T .

- а) Докажите, что $\angle KCB = \angle AKB$.
- б) Найдите AB , если перпендикуляр KH к стороне BC равен 10, а $DC = 25$.

36. Из точки M вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Угол между касательными равен 60° .

- а) Докажите, что диагональ трапеции равна отрезку касательной от точки M до точки касания.
- б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему.

37. В квадрате $ABCD$ построена окружность с центром в точке A , радиусом, равным стороне квадрата, и окружность с центром в точке C , радиусом, равным половине стороны квадрата. Окружности пересекаются в точках M и N .

- а) Докажите, что прямая MN делит сторону BC в отношении $3 : 5$, считая от точки B .
- б) Найдите площадь четырехугольника $AMCN$, если площадь квадрата равна 8.

38. В квадрате $KLMN$ точка D — середина стороны KL , точка E — середина отрезка DM . На стороне KN отмечена точка B так, что $KB : BN = 1 : 3$.

- а) Докажите, что $\angle DBE = 45^\circ$.
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BDE и BMD , если площадь четырехугольника $BEMN$ равна 17.

39. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC . Прямая, проходящая через вершину A , пересекает отрезки MN и BC в точках K и L соответственно, причем в четырехугольник $BMKL$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что периметр треугольника AMK вдвое больше отрезка BL .

б) Найдите AL , если $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$.

40. В прямоугольнике $KLMN$ $KL < LM$. Окружность ω_1 с центром O_1 вписана в угол MNK и касается окружности ω_2 с центром в точке O_2 , вписанной в угол KLM , причем прямая NO_1 касается окружности ω_2 . Известно, что радиус окружности ω_1 относится к радиусу окружности ω_2 как $2 : 3$. Прямая O_1O_2 пересекает стороны KL и MN в точках P и R соответственно, а общая касательная окружностей ω_1 и ω_2 пересекает стороны LM и KN в точках Q и S соответственно.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $PQRS$ относится к площади прямоугольника $KLMN$ как $25 : 49$.

б) Найдите отношение площадей треугольников PRS и PRQ .

41. Вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$ лежат на окружности, вершина D не лежит на этой окружности. Ее хорды BK и BM перпендикулярны прямым AD и CD соответственно.

а) Докажите, что четырехугольник $ACMK$ является прямоугольником.

б) Найдите площадь четырехугольника $ACMK$, если радиус окружности равен 2, а $\angle BAD = 75^\circ$.